



М. Б. МЕНСКИЙ

ГРУППА ПУТЕЙ  
ИЗМЕРЕНИЯ  
ПОЛЯ  
ЧАСТИЦЫ











М. Б. МЕНСКИЙ

ГРУППА ПУТЕЙ  
ИЗМЕРЕНИЯ  
ПОЛЯ  
ЧАСТИЦЫ



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1983

**МЕНСКИЙ М. Б. Группа путей: измерения, поля, частицы.** — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983.

В книге рассматриваются два круга физических проблем: 1) квантовая теория непрерывных измерений и 2) теория квантовых частиц в калибровочных и гравитационных полях. Эти два круга вопросов объединены общностью математического аппарата (пространство путей), но изложены независимо друг от друга.

Квантовая теория непрерывных измерений (таких, как слежение за координатой системы или спектральные измерения) строится на основе фейнмановского интеграла по путям. Это позволяет учитывать обратное влияние измерительной аппаратуры на квантовую систему (явление редукции волнового пакета) при непрерывном измерении.

Теория калибровочного и гравитационного полей и частиц, движущихся в этих полях, строится на основе так называемой группы путей, обобщающей группу трансляций. Это позволяет в определенном смысле «свести геометрию к алгебре» и делает теорию частиц во внешних полях похожей на теорию свободных частиц. Обсуждается связь локальных и глобальных аспектов в описании частиц, исследуется кинематика нелокальных частиц (струн, калибровочных монополей).



# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	6
От автора . . . . .	8
<b>Глава 1. Введение. О чем эта книга . . . . .</b>	<b>13</b>
§ 1. Интеграл по путям и непрерывные измерения . . . . .	13
§ 2. Функции от путей в калибровочной теории и группа путей . . . . .	19
<b>ЧАСТЬ I. ИНТЕГРАЛ ПО ПУТЯМ И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ . . . . .</b>	<b>24</b>
<b>Глава 2. Альтернативы, фейнмановский интеграл и непрерывные измерения . . . . .</b>	<b>24</b>
§ 1. Альтернативы квантовых процессов. Пути как альтернативы . . . . .	25
§ 2. Схема расчета непрерывного измерения . . . . .	31
§ 3. Фейнмановский интеграл по путям . . . . .	35
§ 4. Интеграл по путям для гармонического осциллятора . . . . .	41
<b>Глава 3. Измерение пути осциллятора . . . . .</b>	<b>44</b>
§ 1. Интеграл по коридору путей для осциллятора . . . . .	44
§ 2. Отклонения от классической картины при измерении пути . . . . .	48
§ 3. Оценка силы, действующей на осциллятор . . . . .	50
§ 4*. Учет начального и конечного положений осциллятора . . . . .	56
§ 5*. Произвольные начальное и конечное состояния осциллятора . . . . .	60
§ 6. Редукция состояния при измерении пути . . . . .	64
<b>Глава 4. Спектральные измерения осцилляторов . . . . .</b>	<b>67</b>
§ 1. Спектральные измерения и спектральное представление интеграла по путям . . . . .	68
§ 2. Спектральные измерения осциллятора и оценка действующей на него силы . . . . .	72
§ 3*. Учет неопределенности координаты осциллятора до и после спектрального измерения . . . . .	76
§ 4*. Измерение частотных составляющих, близких к резонансу . . . . .	79
§ 5*. Формулировка результатов в терминах непрерывного спектра . . . . .	82
§ 6. Спектральные измерения в системе двух связанных осцилляторов . . . . .	84
<b>Комментарии к части I . . . . .</b>	<b>89</b>
<b>ЧАСТЬ II. ГРУППА ПУТЕЙ В КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ И ГРАВИТАЦИИ . . . . .</b>	<b>91</b>
<b>Глава 5. Калибровочное поле и его геометрическая интерпретация . . . . .</b>	<b>92</b>
§ 1. Калибровочная инвариантность и калибровочное поле . . . . .	92
§ 2. Главное расслоенное многообразие . . . . .	97

§ 3.	Связность на главном расслоенном многообразии — калибровочное поле . . . . .	102
§ 4.	Состояния заряженных частиц как функции на главном расслоении . . . . .	109
<b>Глава 6. Группа путей и локальные (кинематические) свойства частиц в калибровочном поле . . . . .</b>		<b>114</b>
§ 1.	Определение группоиды путей . . . . .	115
§ 2.	Определение группы путей в аффинном пространстве . . . . .	118
§ 3.	Действие группы путей в аффинном пространстве . . . . .	121
§ 4.	Описание симметричной системы с помощью индуцированного представления группы симметрии . . . . .	123
§ 5.	Группа Пуанкаре и локальные свойства свободных частиц . . . . .	128
§ 6.	Абелево представление группы петель и электромагнитное поле . . . . .	133
§ 7.	Индукцированное представление и заряженные частицы в электромагнитном поле . . . . .	136
§ 8.	Неабелево калибровочное поле и «калибровочно заряженные» частицы . . . . .	141
§ 9.	Калибровочные преобразования с точки зрения группы путей . . . . .	147
§ 10.	Теорема Стокса и напряженность калибровочного поля . . . . .	151
<b>Глава 7. Калибровочные поля в пространствах с неевклидовой топологией . . . . .</b>		<b>158</b>
§ 1.	Эффект Ааронова—Бомы . . . . .	160
§ 2.	Поля в пространстве Минковского с цилиндрической топологией . . . . .	165
§ 3*.	Блоховские волновые функции в периодических электромагнитных полях . . . . .	172
§ 4*.	Обобщенные блоховские функции в двоякопериодическом поле . . . . .	176
§ 5.	Поле магнитного заряда . . . . .	180
§ 6.	Дифференциальные формы и теорема Стокса . . . . .	186
§ 7.	Теоремы де Рама . . . . .	190
§ 8.	Неабелевы дифференциальные формы и представления группоиды путей . . . . .	193
§ 9.	Теорема Стокса для неабелевых форм любых размерностей . . . . .	199
§ 10*.	Обобщенные гомотопии и когомотопии . . . . .	208
<b>Глава 8. Кинематика пробных калибровочных монополей . . . . .</b>		<b>211</b>
§ 1.	Пробный магнитный заряд (монополь) . . . . .	211
§ 2.	Представление группы петель, определяемое неабелевой 2-формой . . . . .	215
§ 3.	Локальный калибровочный монополь в условиях нарушения калибровочной инвариантности . . . . .	218
§ 4.	Нелокальный калибровочный монополь и дион . . . . .	221
§ 5*.	Дальнейший анализ нелокальных свойств диона . . . . .	226
§ 6.	Калибровочный дион как модель цветных кварков . . . . .	231
§ 7.	Лептоны — это кварки, вырвавшиеся на свободу? . . . . .	237
<b>Глава 9. Состояния частиц в калибровочном поле и их теоретическая групповая интерпретация . . . . .</b>		<b>241</b>
§ 1.	Уравнения движения частиц в калибровочном поле . . . . .	242
§ 2.	Обобщенная группа Пуанкаре . . . . .	244
§ 3*.	Состояния частиц как операторы переплетения представлений . . . . .	246
§ 4*.	Обобщенная группа Пуанкаре как группа преобразований системы отсчета . . . . .	250
§ 5.	Решение уравнения движения с помощью интеграла по путям . . . . .	253
§ 6.	Перспективы дальнейшего развития теории . . . . .	258



Глава 10. Группа путей в гравитации . . . . .	262
§ 1. Расслоение реперов над искривленным пространством-временем . . . . .	263
§ 2. Волновые функции на расслоении реперов . . . . .	267
§ 3. Действие обобщенной группы Пуанкаре на расслоении реперов . . . . .	269
§ 4. Группа голономии . . . . .	272
§ 5. Реальные состояния частиц и преобразования системы отсчета . . . . .	275
§ 6. Калибровочное поле в искривленном пространстве-времени. Интеграл по путям . . . . .	278
§ 7. Группа голономии и петли на искривленном пространстве-времени . . . . .	281
§ 8. Группа голономии и перспективы применения группы путей в гравитации . . . . .	284
Комментарии к части II . . . . .	288
Глава 11. Заключение. Нерешенные проблемы . . . . .	290
§ 1. Квантовая теория измерений . . . . .	290
§ 2. Группа путей . . . . .	293
§ 3. Квантовая теория поля . . . . .	294
Приложения	
А. Техника функциональных интегралов . . . . .	298
§ 1. Определение функционального интеграла . . . . .	298
§ 2. Применение общих формул к гармоническому осциллятору . . . . .	303
Б. Состояния заряженных частиц как сечения присоединенного расслоения . . . . .	308
Литература . . . . .	313
Предметный указатель . . . . .	318

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В монографии, предлагаемой читателю, рассматривается широкий круг вопросов из квантовой теории измерений, теории калибровочных полей и гравитации. Столь различные области тем не менее естественно объединены в книге. Автор достигает этого за счет применения к ним единого математического метода, в основе которого лежит понятие пространства путей. В вопросах теории измерений главную роль играет интегрирование на этом пространстве, а в вопросах теории поля — его групповые свойства, суммированные автором в понятии группы путей.

За счет оригинального подхода к затронутым проблемам автору удалось осветить их с новой и во многом неожиданной точки зрения, а в некоторых случаях — поставить и решить практически важные задачи. Так, в первой части книги физически очень прозрачно формулируется квантовая теория измерений, длящихся во времени, а во второй части теория калибровочных и гравитационных полей и движущихся в них частиц строится на алгебраической основе, имеющей для физиков концептуальные преимущества перед традиционно применяемым для этих целей языком дифференциальной геометрии. Большая часть книги посвящена изложению вопросов, почти совершенно не освещенных в отечественной литературе, а значительная часть ее основана на работах самого автора.

Монография М. Б. Менского написана для физиков. В ней сочетается тонкость и красота совре-



менных математических методов и предельная ясность физической интерпретации. Автор сумел перевести на знакомый физикам язык многие принципиальные аспекты теоретико-группового подхода, продемонстрировав при этом его простоту и естественность для рассмотренного круга физических задач. Основы теории интегрирования по путям изложены в монографии в максимально доступной форме. Вместе с тем автор сумел существенно расширить область применения этого метода за счет систематического использования интегрирования «в конечных пределах», т. е. по ограниченной области пространства путей.

Не подлежит сомнению, что эту книгу с интересом и пользой для себя прочтут как физикитеоретики, так и студенты и аспиранты, специализирующиеся в области квантовой механики и квантовой теории поля.

*Академик Н. Н. Боголюбов*

## ОТ АВТОРА

В этой книге рассматривается два круга проблем: 1) расчет непрерывных измерений на основе фейнмановского интеграла по путям; 2) описание частиц во внешних калибровочных и гравитационных полях на основе группы путей. Эти проблемы обсуждаются соответственно в частях I и II, которые можно читать независимо друг от друга. В том и в другом случае используется формализм путей. В теории измерений на первый план выступает мера на пространстве путей, а в калибровочной теории и гравитации — групповая структура этого пространства. Однако и с математической, и с физической точек зрения между вопросами, рассмотренными в двух частях книги, имеются глубокие связи.

Квантовая теория измерений является неотъемлемой частью квантовой механики и крайне важна для ее понимания. Несмотря на это, квантовая теория измерений еще сегодня далека от завершения. В последние годы интерес к ней заметно повысился. Отчасти это связано с дальнейшим развитием квантовой теории, требующим более глубокого понимания ее основ. Отчасти же — с практическими нуждами точных экспериментов и прецизионных измерений, возросшая точность которых требует учета квантовых эффектов при оценке погрешности измерений.

В части I книги делается попытка использовать для построения квантовой теории измерений исчисление амплитуд вероятности и фейнмановский интеграл по путям. Говоря точнее, для системы, которая подвергается измерению, амплитуда перехода из одного состояния в другое выражается через интеграл по некоторому семейству путей (а не по всем путям, как в случае, если никакого измерения не производится). Это позволяет естественно и просто решить такую трудную задачу, как расчет измерений, длящихся непрерывно во времени. Использованный подход автоматически учитывает влияние прибора на измеряемую систему (редукцию состояния измеряемой системы). Разработаны новые вычислительные методы, которые применяются к конкретным схемам измерений — слежению за координатой системы и измерению спектральных составляющих ее движения. В качестве измеряемой системы рассматриваются гармонический осциллятор и система двух связанных гармонических осцилляторов.

Теория калибровочных полей и гравитация находятся в центре современной квантовой теории поля и объединяют в себе большое число новых математических и физических идей. В последние годы в калибровочной теории все большее распространение получает предложенный Мандельштамом формализм путей и путезависимых функций. В нем функции (поля) зависят не от точки пространства-времени, а от пути, ведущего в эту точку.

В части II книги делается попытка подвести под этот формализм новую математическую основу и с ее помощью получить дальнейшее его развитие. Новой основой является предложенная автором группа путей, обобщающая группу трансляций. Группа путей и ее представления позволяют существенно упростить путезависимый формализм, исключив многие сложные и искусственные построения, фигурировавшие в работах Мандельштама. Группа путей в пространстве Минковского оказывается универсальной, пригодной как для обычного калибровочного, так и для гравитационного поля.

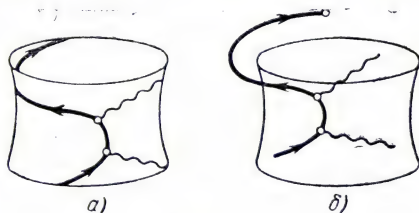


Рис. 1.

На основе группы путей естественным образом<sup>1</sup> описываются калибровочные поля не только в пространстве Минковского, но и в топологически нетривиальных пространствах. Это позволяет дать очень прозрачное описание таких физических явлений и понятий, как эффект Ааронова—Бома, магнитный монополю, закрученные частицы и обобщенные блоховские функции. Многомерные обобщения группы путей (группа 2-путей и т. д.) оказываются естественным инструментом для классификации и анализа неабелевых дифференциальных форм. Более того, они позволяют обобщить понятие неабелевой формы и ввести аналоги калибровочного поля, связанные с более высокими размерностями (2-калибровочное поле и т. д.). Такие обобщенные калибровочные поля должны играть роль в теории струн, мембран и других нелокальных квантовых объектов, появившихся в квантовой теории поля. В рамках этой программы в гл. 8 строится кинематика пробного калибровочного монополя и пробного калибровочного диона (т. е. объекта, обладающего как калибровочным магнитным, так и калибровочным электрическим зарядом). Нелокальные свойства таких объектов дают возможность предложить модель кварков, по крайней мере качественно объясняющую конфайнмент (удержание).

На обложке предыдущей книги автора [37] символически было изображено пространство-время де Ситтера и траектории частиц в нем (рис. 1, а). Однако на некоторых экземплярах книги траектории частиц оказались сдвинутыми и существовали как бы вне пространства-времени (рис. 1, б). Автор счел это добрым предзнаменованием, так как уже тогда работал над теоретико-групповым



вариантом путе­зависимого формализма (он упоминался в заключительных строках книги [37]). Мысль состояла в том, что пространственно-временное многообразие лишь приближенно описывает реальность. Более точную картину дает сеть траекторий, точнее — функция, приписывающая каждой конфигурации траекторий некоторую амплитуду вероятности. Геометрия возникает лишь как характеристика вероятностного распределения по сетям траекторий, отражающая положение максимума этого распределения \*). Группа путей позволила по крайней мере частично реализовать эту программу.

Многое указывает на то, что группа путей и ее представления — это техника, в которой локальные и глобальные элементы теории сводятся на один и тот же уровень, выражаются в терминах одних и тех же понятий. Следовательно, именно эта техника подходит для исследования взаимосвязи локальных и глобальных аспектов теории. Примером, демонстрирующим такую взаимосвязь, является описание локальных свойств калибровочно заряженной частицы в терминах представления подгруппы петель (гл. 6). Оказывается, что свойства частицы, находящейся (виртуально) в единственной точке пространства-времени, описываются с помощью петель, выходящих из этой точки и возвращающихся в нее. Частица, находящаяся в одной точке, с помощью петель как бы прощупывает все пространство-время, и только в результате такого прощупывания возникают определенные локальные свойства частицы (т. е. ее кинематика, в частности — вид ковариантной производной).

Другой важной отличительной чертой предлагаемого формализма является то, что группы внутренней симметрии появляются при описании различных представлений одной и той же универсальной группы — группы путей, которая к тому же имеет непосредственную пространственно-временную интерпретацию. Отпадает необходимость постулировать внутренние симметрии. Они с необходимостью появляются как проявления пространственно-временной структуры, более богатой, чем принято было думать раньше. Вместо пространственно-временного многообразия, состоящего из точек, эта структура описывается пространством путей с действующей на нем группой путей.

При учете гравитации структура усложняется, так как оказывается невозможным полностью отделить, факторизовать группу Лоренца. Вместо этого приходится рассматривать ее объединение с группой путей — обобщенную группу Пуанкаре. Однако по-прежнему и внутренние симметрии, и поля (калибровочное и гравитационное) появляются лишь как проявления этой универсальной пространственно-временной структуры. Все это наводит на мысль, что группа путей и различные ее обобщения могут быть

---

\*) Траектории или пути задаются кривыми в стандартном пространстве Минковского, которое отнюдь не отождествляется с пространством-временем, а скорее является моделью любого касательного пространства к нему.

эффективным инструментом для более детального, чем это принято в существующей теории, исследования пространственно-временных отношений. Возможно, что такое исследование позволит со временем свести материю к геометрии в большей мере, чем это удавалось до сих пор.

Следует сказать несколько слов о связи между группой путей, которая обсуждается в части II, и интегралом по путям, которому посвящена часть I. Такая связь прослеживается в главах 9, 10. Там показано, что интеграл по путям для частицы во внешнем поле получается из интеграла по путям для свободной частицы, если под знак интеграла ввести соответствующее представление группы путей. На самом деле существует еще более тесная связь между этими двумя аспектами формализма путей. Если не отождествлять друг с другом пути, отличающиеся параметризацией, то получающееся семейство параметризованных путей представляет собой уже не группу, а полугруппу. Этого достаточно, однако, чтобы получить теоретико-групповое обоснование интеграла по путям, т. е. вывести фейнмановский интеграл, включая весовой множитель  $\exp(iS)$  и даже форму интеграла действия  $S$ . Таким образом, полугруппа параметризованных путей позволяет вывести из групповых соотношений не только кинематику, но и динамику частицы во внешнем поле. Детальное рассмотрение этого вывода выходит за рамки данной книги. Некоторые другие проблемы, естественно возникающие при рассмотрении группы путей, отмечены в Заключение (глава 11).

В основе данной книги лежит курс лекций, который читался автором на физическом факультете Московского государственного университета в последние годы. Для книги материал лекций существенно переработан и расширен.

Книга написана на «физическом уровне». Основной целью было описать некоторые известные и новые математические структуры и проанализировать их физическое содержание. Точные с математической точки зрения доказательства и даже точные определения и формулировки утверждений сделали бы эту задачу невыполнимой и резко сузили бы круг потенциальных читателей. Поэтому они не приводятся даже в тех случаях, когда существуют. Вместо этого часто даются лишь схемы доказательств. Нет сомнения, что математик без труда даст строгие доказательства всех изложенных в книге результатов. Разумеется, при этом в ряде случаев придется более четко определить фигурирующие в них понятия и очертить пределы применимости утверждений и теорем.

Книга имеет довольно сложную структуру и рассчитана на различные категории читателей, отличающиеся как по их специализации, так и по уровню математической подготовки. Целью автора было сделать ее доступной для всех этих категорий читателей. Поэтому были предприняты специальные усилия, чтобы сделать разные главы по возможности независимыми друг от друга. В связи с этим некоторые положения и формулы повторяются в разных главах и параграфах, часто в различных формах. Это



несколько увеличивает объем книги, зато позволяет при желании читать ее по диагонали или выборочно.

Список литературы не является ни в какой мере полным. Кроме работ, непосредственно использованных при исследовании, приведены некоторые обзоры и монографии и еще некоторые работы, которые автор по тем или иным причинам посчитал относящимися к делу. Ввиду того, что в данной книге многие вопросы рассматриваются под новым углом зрения, некоторые важные и широко цитируемые работы не попали в список литературы, за что автор просит его извинить.

В части I книги использованы обычные единицы измерения, а в части II (если не оговорено противное) — единицы, в которых  $c = \hbar = 1$ . Звездочками отмечены параграфы, которые можно пропустить при первом чтении.

Пользуюсь случаем, чтобы выразить глубокую признательность Н. Н. Боголюбову, поддержавшему эту работу, а также многим другим физикам и математикам, обсуждения с которыми способствовали решению целого ряда принципиальных вопросов. Особо хочется поблагодарить С. П. Новикова, В. Б. Брагинского, А. А. Славнова, И. Я. Арефьеву, В. Н. Руденко, Ю. М. Зиновьева. Я сердечно благодарен В. П. Павлову, который взял на себя труд прочесть рукопись и сделал целый ряд полезных замечаний. Несомненно, эта книга была бы написана много позже или не написана вовсе, если бы не моральная поддержка, оказанная мне моим отцом, Б. М. Менским. Безвременная кончина не позволила ему увидеть ее опубликованной. Я всегда буду ему благодарен.

*М. Б. Менский*



## Глава 1

### ВВЕДЕНИЕ. О ЧЕМ ЭТА КНИГА

Содержанием этой книги являются две области теоретической физики, которые традиционно считаются далекими друг от друга: 1) квантовая теория измерений; 2) калибровочная теория и гравитация. Они, однако, объединяются в книге общим математическим формализмом, который позволяет обнаружить и глубокие физические связи между ними.

В основу подхода к обоим предметам положен *формализм путей*. Этот термин ассоциируется у физиков прежде всего с фейнмановским интегралом по путям. Однако с 60-х годов формализм путей имеет второй аспект — мандельштамовские функции, зависящие от путей. Мы покажем 1) как интегрирование по путям «в конечных пределах» позволяет строить квантовую теорию непрерывных измерений; 2) как мандельштамовские функции от путей возникают в теории представлений так называемой «группы путей», определенной автором в 70-х годах, как на основе группы путей можно развить теорию калибровочного и гравитационного полей и какие новые возможности таит в себе теоретико-групповой подход. Каждый из этих двух вопросов имеет самостоятельный интерес, и излагаются они совершенно независимо (соответственно части I и II). Поэтому тот, кто не заинтересован в теории измерений, может пропустить следующий ниже § 1 и после чтения § 2 сразу переходить к части II. Цель данной главы — дать общее (по необходимости неполное и поверхностное) представление о вопросах, обсуждаемых в книге.

#### § 1. Интеграл по путям и непрерывные измерения

*Интеграл по путям* или *траекториям* был впервые предложен Ричардом Фейнманом [11, 12] в качестве альтернативной формулировки квантовой механики: Суть метода состоит в том, что амплитуда вероятности  $A(x', x)$  перехода квантовой системы из одной точки в другую находится как сумма по путям, соединяющим эти точки \*). Идея очень проста. Система может перейти из точки  $x$

\*) Хотя квантовая система и конфигурационное пространство, в котором она движется, могут быть любыми, для понимания основной идеи до-

в точку  $x'$  по любому пути  $\{x\}$ , соединяющему эти точки. Согласно гипотезе Фейнмана, переход вдоль данного пути  $\{x\}$  происходит с амплитудой вероятности, равной

$$A\{x\} = e^{\frac{i}{\hbar} S\{x\}}, \quad (1.1)$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка (называемая еще квантом действия), а  $S\{x\}$  — интеграл действия (или функционал действия), вычисленный вдоль данного пути:

$$S\{x\} = \int_0^{\tau} dt \left[ \frac{m}{2} \dot{x}^2 - U(x, t) \right].$$

Чтобы найти полную амплитуду вероятности перехода из точки  $x$  в точку  $x'$ , нужно просуммировать амплитуды всех альтернативных способов перехода, т. е. взять интеграл по всем путям:

$$A(x', x) = \int d\{x\} A\{x\} = \int d\{x\} e^{\frac{i}{\hbar} S\{x\}}. \quad (1.2)$$

Для интегрирования по путям Фейнман предлагает вполне определенную процедуру, на которой мы пока останавливаться не будем. Оговорим лишь сразу, что эта процедура не соответствует строгому определению понятий интеграла и меры, которые используются математиками. Тем не менее, чтобы не усложнять язык, физики называют объекты типа (1.2) интегралами по путям. Так будем поступать и мы в этой книге.

Технически процедура интегрирования (суммирования) по путям довольно сложна, а гипотеза Фейнмана эквивалентна обычной квантовой механике. Поэтому практических преимуществ подход Фейнмана в первые годы не давал. Однако его принципиальная важность стала очевидной с самого начала. Она состоит в том, что квантовый переход удалось охарактеризовать с помощью альтернатив, каждая из которых описывается в терминах классической теории. Действительно, переход по определенной траектории характерен для классической теории. Квантовый характер перехода выявляется лишь после суммирования по классическим альтернативам. Суть квантования, таким образом, сосредоточивается в понятии *амплитуды вероятности*, в правилах суммирования амплитуд и в определении элементарной амплитуды (1.1).

Очень важно, что классический характер альтернатив (траекторий) делает расчеты в фейнмановском подходе чрезвычайно наглядными. Если в простейших случаях наглядность не так уж и важна, то в сложных ситуациях, когда требуется на всех этапах расчета сохранять глубокое понимание физического смысла расчетных процедур, подход Фейнмана имеет преимущество. Он ста-

---

статочно рассмотреть лишь одномерную квантовую систему. Именно так мы и будем поступать. Обобщение на случай любого числа степеней свободы не составляет труда.



новится важным, например, при различных обобщениях теории, т. е. при попытках выйти за пределы твердо установленных закономерностей. В части I будет показано, что этот подход эффективен при построении квантовой теории *непрерывных* (длящихся во времени) *измерений* [81—83]. Поясним это на примере слежения за координатой (*измерения пути*).

В интеграл (1.2) все пути входят равноправно. Это характерно для ситуации, когда принципиально нет никакой возможности выяснить, по какому именно пути двигалась система. Предположим, однако, что во время движения частицы от точки  $x$  к точке  $x'$  в интервале времени  $0 \leq t \leq \tau$  производится слежение за координатой системы. Ясно, что в результате этого возникает информация о том, по какому пути двигалась частица, так что разные пути уже не могут входить в выражение для амплитуды равноправно. С учетом этой информации следует интегрировать по выделенному семейству путей или по всем путям, но с весовым множителем.

Во избежание недоразумений следует сразу же пояснить, что такое слежение за координатой имеет смысл, поскольку в применении, например, к элементарной частице принципиальная возможность такого измерения может вызвать сомнения. Наиболее очевиден смысл термина «слежение за координатой», если речь идет об измерении в макроскопической системе. Правда, мы привыкли думать, что макроскопические системы не обладают квантовыми свойствами, поэтому для описания их интеграл по путям не нужен. Однако это не так. На самом деле все физические системы являются квантовыми. Но при наблюдении за макроскопической системой квантовые свойства трудно обнаружить, так как параметры макроскопической системы слишком велики по сравнению с характерными квантовыми масштабами. В частности, действие макроскопической системы много больше, чем квант действия  $\hbar$ . Важно даже не это, а то, что при измерениях в макроскопической системе обычно возникают такие погрешности измерения, что на их фоне квантовые флуктуации совершенно несущественны. Например, трудно наблюдать движение макроскопической системы с такой точностью, чтобы интеграл действия для нее был известен с точностью порядка  $\hbar$ .

Однако из этих рассуждений уже очевидно, что квантовые свойства макроскопической системы станут заметны, если производить измерения ее движения с достаточно высокой точностью. По мере совершенствования измерительной аппаратуры максимальная достижимая точность измерений возрастает. В современных прецизионных измерениях она достигла такого уровня, когда квантовые эффекты могут не только стать заметны, но явиться основным препятствием для дальнейшего повышения этой точности. В частности, вопрос о квантовых ограничениях на точность измерений всерьез обсуждается в связи с конструированием гравитационных антенн (устройств, способных детектировать гравитационные волны). Более подробное обсуждение этого вопроса



и некоторые ссылки будут приведены позднее (см. Комментарии к части I).

Таким образом, относительно макроскопической системы слежение за координатой имеет ясный смысл, а при достаточной точности слежения необходимо учитывать квантовые эффекты. Однако даже и в том случае, если измеряемая система представляет собой элементарную частицу, слежение за координатой с некоторой конечной точностью возможно, например, с помощью таких приборов, как камера Вильсона или пузырьковая камера. Вместо этого можно представить себе систему расположенных близко друг к другу индуктивных датчиков, которые не поглощают электрон, но регистрируют его пролет. Поле тока, наведенного в каждом таком датчике, влияет на полет электрона, однако это как раз то неустранимое обратное влияние измерительной аппаратуры на квантовую систему, которое описывается принципом неопределенности. Изменение состояния под действием этого обратного влияния есть то, что называется *редукцией состояния* или *редукцией волнового пакета*. В методе интегрирования по путям редукция учитывается автоматически.

Принципиально важно, что измерение может производиться лишь с некоторой конечной точностью. Пусть слежение за координатой производится с точностью  $\Delta a$ . Если в результате слежения получен результат  $\{a\} = \{a(t) \mid 0 \leq t \leq \tau\}$ , то это означает, что переход из точки  $x$  в точку  $x'$  происходил по одному из путей  $\{x\}$ , удовлетворяющих неравенству  $|x(t) - a(t)| \leq \Delta a$ . Это значит, что в пространстве всех путей выделяется некоторый коридор и достоверно известно, что частица не выходила за пределы этого коридора. Обозначим этот коридор путей через  $\alpha$ . Ясно, что коридор  $\alpha$  более адекватно, чем путь  $\{a\}$ , описывает результат измерения, так как содержит информацию и о точности измерения, и о его результате.

Если результат слежения за координатой соответствует коридору путей  $\alpha$ , то частица заведомо распространяется в пределах этого коридора. В этом случае амплитуда вероятности перехода из точки  $x$  в точку  $x'$  описывается интегралом по путям, лежащим лишь в пределах коридора  $\alpha$ , или интегрированием с весом:

$$A_{\alpha}(x', x) = \int_{\alpha} d\{x\} e^{\frac{i}{\hbar} S\{x\}} = \int d\{x\} \rho_{\alpha}\{x\} e^{\frac{i}{\hbar} S\{x\}}. \quad (1.3)$$

Здесь  $\rho_{\alpha}\{x\}$  — функционал, близкий к единице для путей, лежащих в коридоре  $\alpha$ , и быстро убывающий вне этого коридора. Если результат измерения известен, то формула (1.3) дает амплитуду вероятности перехода системы из одной точки в другую. Если же измерение еще не производилось, то та же формула дает амплитуду вероятности того или иного результата измерения, т. е. позволяет предсказывать (вероятностным образом) результат слежения за координатой. Чтобы из амплитуды получить *вероятность*, достаточно вычислить квадрат модуля. Таким образом,

величина

$$P_{x', x}(\alpha) = |A_\alpha(x', x)|^2$$

есть вероятность того или иного результата  $\alpha$  слежения за координатой при условии, что движение системы начинается из точки  $x$  и заканчивается в точке  $x'$ .

Позднее мы подробно исследуем это распределение вероятностей. Однако уже сейчас, без всяких вычислений, можно проанализировать его в предельных случаях. Пусть  $\{\xi\}$  — экстремаль действия с граничными значениями  $x, x'$ ,

$$m\ddot{\xi} = -\frac{\partial U(\xi, t)}{\partial \xi},$$

$$\xi(0) = x, \quad \xi(\tau) = x'.$$

Вклад в интеграл (1.2) дают лишь пути, близкие к  $\{\xi\}$ , так как для остальных путей действие  $S\{x\}$  слишком быстро меняется при переходе от одного пути к другому и множитель  $\exp(iS/\hbar)$  быстро осциллирует. Предположим, что ширина коридора путей вокруг  $\{\xi\}$ , вносящих вклад в полную амплитуду перехода (1.2), равна  $\Delta\alpha_q$ . В центре этого коридора лежит путь  $\{\xi\}$ . Обозначим этот коридор через  $\alpha_q = (\{\xi\}, \Delta\alpha_q)$ . По определению,  $A_{\alpha_q} \approx A$  (мы опускаем в обозначении амплитуды граничные значения  $x, x'$ ). Это значит, что интеграл по коридору  $\alpha_q$  близок к интегралу по всем путям. Рассмотрим теперь коридор  $\alpha$ , гораздо более широкий, чем  $\alpha_q$ , т. е.  $\Delta\alpha \gg \Delta\alpha_q$ . Ясно, что  $A_\alpha \approx A$ , если только  $\alpha_q \subset \alpha$ , т. е. классическая траектория  $\{\xi\}$  лежит в пределах коридора  $\alpha$ . В противном случае  $A_\alpha \approx 0$ . Мы получаем чисто классический вывод: в результате слежения за координатой может быть получен результат  $\{a\}$ , отличающийся от классической траектории  $\{\xi\}$  не более, чем на величину  $\Delta a$ , характеризующую точность прибора.

Качественно другой результат получается в случае, если погрешность прибора меньше, чем характерный квантовый порог,  $\Delta a \ll \Delta\alpha_q$ . При этом коридор  $\alpha$  оказывается намного более узким, чем квантовый коридор  $\alpha_q$ . Если  $\alpha \subset \alpha_q$ , т. е. результат измерения  $\{a\}$  отличается от классической траектории  $\{\xi\}$  не более, чем на  $\Delta\alpha_q$ , то амплитуда  $A_\alpha$  велика. Однако когда  $\alpha$  выходит за пределы коридора  $\alpha_q$ , амплитуда  $A_\alpha$  не сразу начинает убывать. Сначала «скорость изменения» интеграла действия  $S\{x\}$  еще недостаточна, чтобы уже в пределах такого узкого коридора, как  $\alpha$ , осцилляции множителя  $\exp(iS/\hbar)$  погасили друг друга. И лишь при значительном удалении  $\{a\}$  от  $\{\xi\}$  (значительно дальше, чем на  $\Delta\alpha_q$  и тем более на  $\Delta a$ ) скорость изменения действия становится достаточно большой, осцилляции гасят друг друга и амплитуда  $A_\alpha$  убывает. Следовательно, при  $\Delta a \ll \Delta\alpha_q$  с конечной вероятностью появляются результаты измерения  $\{a\}$ , отличающиеся



от классической траектории  $\{\xi\}$  не только больше, чем на ошибку измерения  $\Delta a$ , но даже больше, чем на  $\Delta a_q$ . В пределе  $\Delta a \rightarrow 0$  амплитуда  $A_q$  имеет одну и ту же абсолютную величину для любого результата измерения  $\{a\}$ . В этом случае можно говорить, что результат измерения характеризуется не коридором путей, а одним единственным путем  $\{a\}$ . И, в соответствии с исходной гипотезой Фейнмана, амплитуды вероятности различных путей  $\exp\{iS\{a\}/\hbar\}$  отличаются лишь фазовыми множителями, но по абсолютной величине одинаковы.

Интерпретация этих выводов очевидна. Когда точность измерения становится слишком большой,  $\Delta a \ll \Delta a_q$ , измерение настолько сильно влияет на поведение квантовой системы, что система может далеко отойти от своей классической траектории. Можно сказать, что в этом случае изменение (редукция) состояния под влиянием прибора сильно модифицирует поведение системы и отклоняет его от классического.

Таким образом, низкая точность слежения за координатой  $\Delta a \gg \Delta a_q$  приводит к большому разбросу результатов из-за погрешности прибора, а слишком высокая точность,  $\Delta a \ll \Delta a_q$ , приводит к разбросу из-за обратного влияния прибора на квантовую систему. Минимальный разброс (равный  $\Delta a_q$ ) получается в случае, если точность прибора равна квантовому порогу,  $\Delta a \approx \Delta a_q$ . Такой режим измерений является оптимальным с точки зрения квантовых измерительных шумов. Напомним, что величина квантового порога  $\Delta a_q$  определяется условием  $A_{a_q} \approx A$ .

Хотя применение интеграла по путям для расчета слежения за координатой (измерения пути) представляется чрезвычайно естественным, на самом деле область применения этого метода гораздо шире. В любом случае, когда результат непрерывного измерения в квантовой системе можно сформулировать, указав на некоторое семейство путей или весовой множитель в пространстве путей, для расчета вероятностей можно применить интеграл по путям. В части I книги мы применим его не только для расчета измерения пути, но и для расчета спектральных измерений в простых системах.

Чрезвычайно существенным преимуществом метода интегрирования по путям в теории квантовых измерений является то, что он позволяет автоматически учесть изменение состояния (редукцию волнового пакета), которое происходит под действием измерительной аппаратуры. Учет редукции при измерении обычных наблюдаемых можно произвести в рамках традиционного операторного формализма. Однако при описании непрерывных измерений их приходится в этом случае заменять последовательностью очень большого количества мгновенных измерений наблюдаемых. При этом, во-первых, не всегда легко правильно выбрать эти наблюдаемые, чтобы отобразить реальное измерение, а во-вторых, учет редукции при каждом измерении из длинной последовательности чрезвычайно усложняет всю картину. В методе же интегри-

рования по путям (основная схема которого изложена выше) учет редукции при непрерывном измерении происходит автоматически. При этом мы получаем адекватное описание динамики системы в тех случаях, когда редукция существенна и, следовательно, описание с помощью уравнения Шредингера неприменимо.

## § 2. Функции от путей в калибровочной теории и группа путей

В 1962 г. Стэнли Мандельштам предложил качественно новое применение формализма путей в квантовой физике [146, 147]. До него состояния частиц в координатном представлении описывались с помощью функций, зависящих от точки пространства-времени  $\psi(x)$ . Мандельштам вместо этого рассмотрел *функции, зависящие от путей* \*), ведущих в эти точки  $\Psi[x]$ . Поскольку описываются при этом те же самые объекты, формализм, содержащий гораздо большее количество степеней свободы (континуум степеней свободы вместо конечного числа их), является избыточным. И действительно, функции от путей  $\Psi[x]$  удовлетворяют дополнительным условиям, с помощью которых их можно свести к функциям от точек  $\psi(x)$ . Однако преимущество функций от путей состоит в том, что они не содержат специфического произвола, которым обязательно обладают функции от точек.

Речь идет о произволе, связанном с группой *калибровочных преобразований*. Например, если  $\psi(x)$  — состояние заряженной частицы в электромагнитном поле  $A_\mu(x)$ , то имеется произвол, описываемый калибровочным преобразованием

$$\begin{aligned}\psi(x) &\mapsto e^{ie\chi(x)}\psi(x), \\ A_\mu(x) &\mapsto A_\mu(x) + \frac{\partial\chi(x)}{\partial x^\mu}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

(Здесь  $e$  в показателе экспоненты обозначает заряд частицы.) Правда, формализм описания заряженной частицы в поле устроен так, что он остается инвариантным при калибровочном преобразовании, так что в физически наблюдаемых величинах никакого произвола нет, произвол в теории является фиктивным. Но именно поэтому хотелось бы иметь формализм, который не содержит произвола вовсе. Вот этим и отличается формализм Мандельштама, в котором вместо функций от точек  $\psi(x)$  используются функции от путей  $\Psi[x]$ .

Введя калибровочно инвариантный путезависимый формализм для случая электромагнитного поля [146], Мандельштам сразу же применил его и к гравитационному полю [147]. Позднее в работах Биляницкого-Бируля [148] и Мандельштама [150] этот формализм был обобщен на случай произвольного калибровочного поля.

\*) Сейчас нас интересует путь независимо от того, как он параметризован. Поэтому используется несколько иное обозначение  $[x]$  (в отличие от  $\{x\}$  в интеграле по путям, где важна зависимость пути от времени).



Калибровочная инвариантность достигается в формализме Мандельстама за счет существенного технического усложнения теории, поэтому он не сразу нашел признание. Тем не менее со временем это произошло (или, скорее, происходит на наших глазах). Оказалось, что этот подход позволяет глубже проникнуть в существо явлений, связанных с калибровочными и гравитационными полями. В последнее время количество работ, посвященных формализму Мандельстама, заметно увеличилось. Все шире распространяется убеждение, что только язык путей или контуров является адекватным для описания калибровочных полей. Появилась надежда решить с помощью путей одну из важнейших проблем квантовой теории поля — проблему конфайнмента или удержания кварков (т. е. объяснения того, почему кварки не наблюдаются по отдельности, а лишь в виде связанных состояний — адронов). Работы Вильсона, 'т Хоофта, Полякова, Мандельстама и других [100, 151, 155, 158, 160] указывают на то, что проблема конфайнмента, возможно, решается при учете фазовых переходов калибровочного поля. В свою очередь фазы калибровочного поля естественным образом описываются, если это поле рассматривать как поле на множестве замкнутых путей (контуров). *Контурный формализм*, являющийся по существу вариантом путе­зависимого формализма Мандельстама, приобретает первостепенную важность (см. кроме цитированных выше работ также работы [153—164]).

В этой книге будет рассмотрен теоретико-групповой подход к построению путе­зависимого формализма в калибровочной теории и гравитации. Он был разработан в ряде работ автора [167—175]. Суть этого подхода состоит в том, что пути в пространстве Минковского (те самые, которые использовал еще Мандельстам) можно организовать в группу, если отождествить пути, отличающиеся некоторыми несущественными для теории деталями. Получающаяся таким образом группа была определена в работах [171—173] и названа *группой путей* \*). Само калибровочное поле вводится как представление подгруппы замкнутых путей (петель), а заряженные частицы в калибровочном поле описываются представлениями группы всех путей, причем это представление индуцируется из подгруппы петель. При описании гравитационного поля и частиц, движущихся в гравитационном поле, ключевую роль вместо подгруппы петель играет другая подгруппа, тесно связанная с группой голономии. Чрезвычайно существенным обстоятельством является то, что группа путей, определенная в пространстве Минковского, оказывается универсальной и может быть использована даже для описания искривленного пространства. Скажем несколько слов о том, что же такое группа путей.

*Группа путей* — это обобщение обычной группы трансляций, пригодное даже в том случае, когда силовые поля не равны нулю

---

\*) Еще раньше рассматривался группоид путей [168], а в работах [167, 169, 170] использовались операторы, образующие представление группы путей, хотя сама группа путей явно не фигурировала.

и не симметричны. Элемент группы трансляций представляет собой, как известно, вектор. Это значит, что элемент группы характеризуется лишь тем, в каком направлении и на какое расстояние происходит перенос (трансляция). В отличие от этого элемент группы путей характеризуется не только направлением и дальностью переноса, но и формой кривой, вдоль которой происходит перенос. Оказывается, что поля (электромагнитное, калибровочное или гравитационное) и частицы, движущиеся под действием этих полей, характеризуются соответствующими представлениями группы путей. Представления эти тесно связаны с группой гомотопии, возникающей при геометрическом описании калибровочного или гравитационного поля.

Таким образом, группа путей позволяет глубже проанализировать алгебраическую природу тех геометрических понятий, которые широко вошли в физику при развитии гравитации и калибровочной теории. В то же время группа путей позволяет упростить путезависимый формализм, так как многие сложные построения сводит к рутинным теоретико-групповым операциям, а свойства объектов, которыми оперирует этот формализм, автоматически обеспечивает за счет групповой структуры.

Продemonстрируем на простом примере электродинамики, как группа путей и ее представления появляются в калибровочной теории.

Пусть  $\phi(x)$  — функция от точки пространства-времени, описывающая состояние частицы с зарядом  $e$ , движущейся в электромагнитном поле  $A_\mu(x)$ . При калибровочном преобразовании волновая функция и потенциал поля преобразуются по формулам (2.1). Для того чтобы построить функцию, зависящую от пути и описывающую состояние частицы, введем сначала вспомогательную функцию от путей, определяемую только полем. Зафиксируем некоторую точку в пространстве-времени, например начало отсчета  $O$ , и будем проводить всевозможные пути  $[\xi]$ , начинающиеся в этой точке, а кончающиеся в различных точках  $x$ , так что  $[\xi] = \{\xi(\tau) \mid 0 \leq \tau \leq 1\}$ ,  $\xi(0) = O$ ,  $\xi(1) = x$ . Каждому такому пути сопоставим величину

$$\alpha[\xi] = \exp \left[ ie \int_0^1 d\tau \dot{\xi}^\mu(\tau) A_\mu(\xi(\tau)) \right] = \exp \left[ ie \int_{[\xi]} d\xi^\mu A_\mu(\xi) \right]. \quad (2.2)$$

С помощью функции от путей  $\alpha[\xi]$  преобразуем теперь волновую функцию  $\phi(x)$  так, чтобы она также зависела от путей. Именно, каждой функции  $\phi(x)$  сопоставим функцию  $\Psi[\xi]$ , определенную формулой

$$\Psi[\xi] = (\alpha[\xi])^{-1} \phi(x).$$

Ясно, что функция от путей  $\Psi[\xi]$  может представлять состояние заряженной частицы взамен обычной волновой функции  $\phi(x)$ . Она несет столько же информации и по существу представляет собой другую (и разумеется более сложную) запись волновой



функции. Однако нетрудно убедиться, что *функция от путей*  $\Psi[\xi]$  не меняется при калибровочных преобразованиях. Действительно, при замене потенциала согласно формуле (2.1) фактор  $\alpha[\xi]$  преобразуется как

$$\alpha[\xi] \mapsto \alpha'[\xi] = \exp[ie(\chi(x) - \chi(0))] \alpha[\xi].$$

Учитывая закон преобразования (2.1) волновой функции  $\psi(x)$ , получим для функции от путей

$$\Psi[\xi] \mapsto \Psi'[\xi] = e^{ie\chi(0)} \Psi[\xi],$$

преобразование лишь с помощью несущественного фазового множителя (не зависящего от  $x$ ).

Таким образом, функции от путей  $\Psi[\xi]$  могут составить основу для построения калибровочно-инвариантного формализма. Процедура, с помощью которой были введены эти функции, является искусственной. Позднее мы увидим, что в рамках теоретико-группового формализма, основанного на группе путей, они возникают самым естественным образом.

Скажем несколько слов о *группе путей*. В проделанной выкладке существенную роль играла величина  $\alpha[\xi]$ , определенная формулой (2.2). Нетрудно видеть, что эта величина не зависит от того, как параметризована кривая  $\xi(\tau)$  на пространстве-времени. Изменив несколько определение,

$$\alpha[\xi] = \exp \left[ ie \int_0^1 d\tau \dot{\xi}^\mu(\tau) A_\mu(\xi(\tau) - \xi(0)) \right],$$

мы получим, что величина  $\alpha[\xi]$  не меняется и при замене кривой  $\xi(\tau)$  на кривую  $\xi'(\tau) = \xi(f(\tau)) + a$ , полученную изменением параметризации и общим сдвигом. Наконец, если в любом месте кривой  $[\xi]$  вставить в нее «аппендикс», представляющий собой произвольную кривую, проходимую в одном направлении, а затем в противоположном направлении (см. рис. 2), то величина  $\alpha[\xi]$  также не изменится. Это значит, что она зависит по существу не от кривой, а от класса кривых, если в класс включить кривые, отличающиеся лишь параметризацией, общим сдвигом и добавлением или изъятием любого числа «аппендиксов». Оказывается, такие классы образуют группу. Умножение в ней определяется как путь, получаемый последовательным прохождением сначала одного из путей-сомножителей, а затем другого (см. рис. 2). Для обозначения класса мы будем использовать термин «путь», а всю группу назовем *группой путей*.

Отображение  $[\xi] \mapsto \alpha[\xi]$  не является представлением группы путей. Однако если рассматривать его лишь для замкнутых путей (петель),  $\xi(1) = \xi(0)$ , то оно оказывается представлением подгруппы петель. Это представление, а также его некоммутативные обобщения играют в алгебраическом подходе ту же роль, что *группа голономии* в геометрическом подходе к калибровочной тео-



рии. Это представление адекватно описывает поле (электромагнитное или калибровочное), тогда как при описании этого поля с помощью потенциала  $A_\mu(x)$  возникает калибровочный произвол и связанные с ним трудности.

Группа путей определяется с помощью кривых на пространстве Минковского. Однако если объединить группу путей с группой Лоренца, то получившуюся таким образом *обобщенную группу Пуанкаре* можно использовать для описания гравитационного поля и частиц, движущихся в нем. Такая универсальность группы путей показывает, что она имеет глубокий физический смысл. Мы обсудим этот вопрос в соответствующем месте.

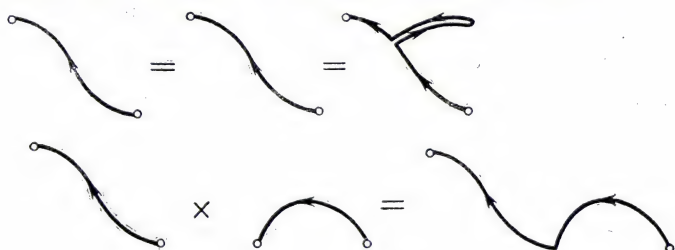


Рис. 2.

Может сложиться впечатление, что в книге рассматривается два совершенно не связанных друг с другом круга вопросов — фейнмановский интеграл по путям и путезависимый формализм Мандельштама. Оказывается, однако, что между ними существует тесная внутренняя связь.

Важное указание на связь вопросов, рассмотренных соответственно в частях I и II книги, содержится в Замечании в конце гл. 9, § 5. Дело в том, что интеграл по путям можно получить в рамках теории представлений группы путей. Для этого следует рассмотреть более широкую группу, точнее — полугруппу параметризованных путей. При рассмотрении переплетения физически выделенных представлений полугруппы возникает интегрирование по путям с весом, который постулировался Фейнманом, (1.1). Интеграл действия, определяющий этот вес, не приходится в этом случае постулировать, он автоматически получается за счет свойств полугруппы. Этот вопрос не рассматривается в книге более детально, хотя он представляется важным для дальнейшего развития теории. Можно надеяться, что исследования в этом направлении позволят дать теоретико-групповую интерпретацию интеграла по путям и в конечном счете построить квантовую теорию вероятности.

## ЧАСТЬ I

# ИНТЕГРАЛ ПО ПУТЯМ И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

---

В этой части будет намечен подход к квантовой теории непрерывных измерений, основанный на интегрировании по путям. Подробнее будут рассмотрены слежение за координатой гармонического осциллятора и спектральные измерения в системе связанных гармонических осцилляторов.

Все рассмотрения проводятся в рамках обычной нерелятивистской квантовой механики. Теоретико-групповая техника и тем более группа путей в этой части вообще не применяется. По этим причинам, а также потому, что рассмотренные здесь вопросы представляют самостоятельный интерес, часть I можно читать независимо от остальной части книги и при меньшей математической подготовке.

С другой стороны, читатель, который не интересуется теорией измерений, может пропустить эту часть и приступить сразу к чтению части II без всякого ущерба для понимания.

## Глава 2

### АЛЬТЕРНАТИВЫ, ФЕЙНМАНОВСКИЙ ИНТЕГРАЛ И НЕПРЕРЫВНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Идея использования интегралов по путям в квантовой теории непрерывных измерений уже была сформулирована во Введении (см. гл. 1, § 1). Здесь мы поставим задачу более детально и дадим необходимые сведения из теории интегралов по путям. Предварительно будет кратко изложена теория амплитуд вероятности, лежащая в основе интегрирования по путям, однако имеющая более широкую область применения и чрезвычайно важная для понимания квантовой теории измерений.

Квантовая теория измерений всегда была и до сих пор остается самым интригующим и важным и в то же время наименее разработанным разделом квантовой механики. Для описания процесса измерения нет такого простого и понятного средства, каким уравнение Шредингера является для описания динамики квантовой системы. Особые трудности вызывает описание изменения (редукции) состояния измеряемой системы под воздействием прибора. Между тем практика уже сейчас требует квантового подхода при описании реальных измерений, чаще всего неизмеримо более слож-

ных, чем идеализированные мысленные эксперименты, рассматриваемые в курсах квантовой механики.

Среди реальных измерений чаще всего встречаются непрерывные измерения, длящиеся во времени. При любом таком измерении редукция состояния также происходит непрерывно, что существенно затрудняет рассмотрение. Представление непрерывного измерения как последовательности большого числа мгновенных измерений в некоторых случаях решает проблему, однако на практике приводит к громоздкому формализму, не имеющему простой и прямой интерпретации. Кроме того, таким способом можно представить лишь узкий класс непрерывных измерений, далеко не исчерпывающий случаев, встречающихся на практике (см. по этому поводу гл. 3, § 6, где подробно проанализирована редукция состояния при измерении пути).

Подход к теории непрерывных измерений, основанный на интегрировании по путям «в конечных пределах», лишен этих недостатков: 1) Он позволяет описать весь процесс измерения в терминах таких классических образов, как пути, т. е. практически в терминах тех понятий, которыми пользуется экспериментатор. Поэтому вопрос об интерпретации формализма вообще не возникает. 2) Он автоматически учитывает редукцию состояния измеряемой системы под действием прибора. Последнее обстоятельство позволяет считать интеграл Фейнмана «в конечных пределах» адекватным средством для совместного описания взаимодействующих друг с другом классической и квантовой систем. В этом смысле метод может иметь намного более широкую область применения, чем теория измерений. В частности, не исключено, что он окажется эффективным в теории макроскопических квантовых эффектов.

## § 1. Альтернативы квантовых процессов.

### Пути как альтернативы

В основе понятия интеграла по путям лежит представление о том, что квантовый процесс может произойти одним из некоторого числа альтернативных способов, и правило нахождения вероятности процесса в этом случае. Основным здесь является понятие *амплитуды вероятности* [12]. Всем известен классический пример, в котором частица может пролететь из источника в детектор, лишь пройдя через одну из двух щелей в непрозрачном экране (рис. 3). Частица может пролететь либо через одну щель, либо через вторую. Пролет через определенную щель является альтернативой окончательного процесса — перехода из источника в детектор. Спрашивается, как в этом случае вычислить вероятность окончательного процесса?

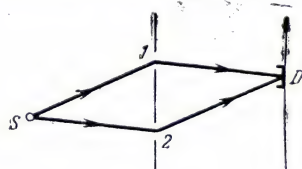


Рис. 3.



Ответ зависит от условий эксперимента. При наиболее простой организации эксперимента кроме детектора  $D$  других измерительных приборов нет. В этом случае после обнаружения частицы детектором  $D$  принципиально невозможно выяснить, через какую из щелей она пролетела, т. е. какая из альтернатив реализовалась. В этом случае каждая из альтернатив характеризуется *амплитудой вероятности*,  $A_1$  и  $A_2$  соответственно, и *приписывать альтернативам вероятности нельзя*, физически бессмысленно. Для нахождения вероятности полного процесса следует сначала найти его амплитуду, вероятности по правилу сложения амплитуд, и затем уже, возведя эту амплитуду в квадрат, найти вероятность:

$$A = A_1 + A_2, \quad P = |A|^2. \quad (1.1)$$

Таким образом, если нет принципиальной возможности выяснить, какая из альтернатив реализовалась, основным является правило сложения амплитуд: Амплитуда вероятности процесса, идущего посредством одной из нескольких альтернатив, равна сумме амплитуд вероятности этих альтернатив. В таком случае *альтернативы* называются *интерферирующими*.

Другая схема постановки опыта с пролетом сквозь щели состоит в том, что у каждой из щелей ставится детектор, который не поглощает частицу и вообще как можно меньше влияет на ее движение. Наличие этих дополнительных детекторов позволяет после попадания частицы в детектор  $D$  ответить еще и на вопрос о том, через какую щель пролетела частица, т. е. какая из альтернатив реализовалась. Оказывается, что в этом случае расчет вероятности следует вести совершенно иначе. Сначала следует найти *вероятность* каждой альтернативы (возведя амплитуды вероятности в квадрат), а затем уже сложить вероятности:

$$P = P_1 + P_2, \quad P_1 = |A_1|^2, \quad P_2 = |A_2|^2. \quad (1.2)$$

Таким образом, если существует хотя бы принципиальная возможность, не нарушая условий эксперимента, выяснить, какая из альтернатив реализовалась, каждая из альтернатив характеризуется вероятностью и действует правило сложения вероятностей: вероятность процесса, идущего посредством одной из нескольких альтернатив, равна сумме вероятностей всех альтернатив. В таком случае *альтернативы* называются *несовместимыми*.

Мы подробно рассмотрели *правило сложения амплитуд*, которое играет основную роль для дальнейшего. Однако в квантовой механике используется еще *правило умножения амплитуд*, и только совокупность этих двух правил позволяет рассчитывать любые процессы. Правило сложения амплитуд действует при подсчете амплитуды вероятности такого события, которое может осуществиться различными способами (альтернативами). Правило умножения амплитуд действует при подсчете амплитуды вероятности сложного события, т. е. такого, которое осуществляется как последовательность других, «более элементарных», событий. Напри-

мер, в приведенном выше примере пролет частицы через первую щель (первую альтернативу) можно мыслить как последовательность двух событий: 1) пролет от источника до первой щели и 2) пролет от первой щели до детектора. Если мы знаем амплитуду вероятности каждого из этих двух событий, то амплитуда вероятности пролета через первую щель находится перемножением этих двух амплитуд \*).

Вернемся к рассмотрению квантовых альтернатив. Следует подчеркнуть, что одни и те же события в одном эксперименте могут служить интерферирующими альтернативами, а в другом — несовместимыми. Все зависит от того, как устроена измерительная аппаратура, какую информацию она может дать. Поэтому при расчете какого-то сложного процесса в квантовой механике всегда приходится внимательно анализировать не только сам процесс, но и применяемую для его исследования аппаратуру. Изменение аппаратуры может изменить и характер процесса. Формально это проявляется в изменении правил вычисления вероятностей. С физической точки зрения в этом сказывается неустранимое влияние измерительной аппаратуры на измеряемый объект (процесс), характерное для квантовой механики.

Эта схема кажется сейчас уже довольно простой и почти привычной. Однако потребовалось много лет для того, чтобы она вошла в сознание физиков, преодолев психологические барьеры. Трудно переоценить значение тех квантовомеханических идей, которые непосредственно связаны с понятием амплитуды вероятности и правилами сложения и умножения амплитуд \*\*). Свое значение эти идеи сохраняют и сейчас. Понятие амплитуды вероятности не исчерпало еще своих возможностей. Поль Дирак высказывал мнение [8], что из двух ключевых моментов квантовой механики — некоммутативности наблюдаемых и понятия амплитуды вероятности — последнее является более важным, и именно с ним

---

\*) Нетрудно видеть, что эти операции над амплитудами вероятности в квантовой механике полностью аналогичны соответствующим операциям в классической теории вероятностей. Там действуют правила сложения и умножения вероятностей, применимые в тех же самых ситуациях (реализация события посредством некоторого количества альтернатив или реализация его как последовательности нескольких событий). Таким образом, квантовая теория отличается лишь тем, что требует, чтобы все вычисления проводились с амплитудами вероятности и лишь в конце производился переход к вероятности.

Правда, в некоторых случаях, когда альтернативы несовместимы, вместо правила сложения амплитуд и в квантовой теории действует правило сложения вероятностей. Однако это как раз те случаи, когда реализацию альтернатив можно наблюдать с помощью классического прибора. В этом случае мы имеем дело с системой, которая на этом этапе является классической.

\*\*) Существует мнение, что квантовая механика должна базироваться на иной логической основе, нежели классическая. До сих пор продолжают попытки сформулировать законы этой *квантовой логики* (см., например, [3, 12, 62, 63, 70—78]). Однако с практической точки зрения принципиальные отличия квантовой теории от классической заключены уже в понятии амплитуды вероятности и в исчислении амплитуд.



будет связано будущее развитие теории и преодоление сегодняшних трудностей. По нашему мнению, это утверждение остается совершенно верным и сегодня. И главным направлением, на котором развивается и применяется идея амплитуды вероятности, остается метод *интегрирования по путям* Фейнмана.

Излагая основные идеи, связанные с интегрированием по путям, мы для простоты будем рассматривать одномерную нерелятивистскую систему, которая описывается единственной координатой  $x$ . Впрочем, если под  $x$  понимать совокупность нескольких координат, то почти все рассуждения переносятся на случай многомерной системы.

Пусть система за интервал времени  $[0, \tau]$  переходит из точки  $x$  в точку  $x'$ . Классическая система всегда переходит по определенному пути. Это значит, что в каждый момент времени мы знаем ее положение, т. е. знаем функцию  $t \mapsto x(t)$  на отрезке  $[0, \tau]$ . Если задана такая функция (кривая), будем говорить, что задан *путь* \*)  $\{x\} = \{x(t) \mid 0 \leq t \leq \tau\}$ . Путь классической системы от точки  $x$  к точке  $x'$  всегда является определенным. Относительно же квантовой системы нельзя сказать, по какому именно пути она переходит из точки в точку. Фейнман показал [11, 12], что различные пути являются альтернативными способами перехода, и каждый из них (каждая альтернатива) характеризуется своей *амплитудой вероятности*  $A\{x\}$ . Чтобы найти полную амплитуду вероятности перехода из точки  $x$  в точку  $x'$ , нужно сложить амплитуды всех альтернатив, т. е. проинтегрировать функционал  $A\{x\}$  по всем путям, ведущим из  $x$  и  $x'$ :

$$A(x', x) = \int d\{x\} A\{x\}. \quad (1.3)$$

Вспоминая то, что было сказано выше, мы видим, что согласно гипотезе Фейнмана *отдельные пути являются интерферирующими альтернативами для перехода из одной точки в другую*. То, что они являются альтернативами, довольно естественно: переход из одной точки в другую может совершаться не иначе, как по одному из путей. Впрочем, и это предположение в квантовой механике нетривиально и заслуживает внимания. По существу оно означает, что квантовая механика не так уж радикально отличается от классической, как это казалось сначала. Казалось, что понятие пути перехода вообще не имеет смысла в квантовой меха-

---

\*) Для читателей, которые не ограничатся этой частью книги, а будут читать следующую (относящуюся к совершенно другим вопросам), необходимо заметить, что термин «путь» применяется в этих частях в различных смыслах. Правильнее было бы назвать объекты  $\{x\}$ , которые нас сейчас интересуют, *параметризованными путями*. Рассматриваемые в следующей части пути  $[x]$ , образующие группу путей, представляют собой классы параметризованных путей (точное определение этих классов будет дано в части II для релятивистского случая). Поскольку, однако, в данной части встречаются лишь параметризованные пути, слово «параметризованный» в ней систематически опускается.



нике, что частица переходит из точки в точку как бы скачком. Казалось, задавать вопрос: по какому пути переходит частица? — бессмысленно, что на этот вопрос нельзя дать ответа даже в терминах вероятностей. Фейнман показал, что ответа в терминах вероятностей действительно дать нельзя. Однако можно дать ответ в терминах амплитуд вероятностей. Частица переходит из точки в точку вдоль одного из путей  $\{x\}$ , соединяющих эти точки, и каждый путь характеризуется амплитудой вероятностей  $A\{x\}$ .

Согласно гипотезе Фейнмана, эта амплитуда равна

$$A\{x\} = e^{\frac{i}{\hbar} S\{x\}}, \quad (1.4)$$

где  $S\{x\}$  — интеграл действия, вычисленный вдоль данного пути, а  $\hbar$  — постоянная Планка (квант действия). Амплитуда вероятности зависит, таким образом, от того, сколько квантов действия содержит действие вдоль данного пути.

Таким образом, в подходе Фейнмана квантовая механика несколько сблизилась с классической, от которой она, казалось, безнадежно оторвалась. Точнее, не меняя квантовую механику, взяв ее точно такой, какой она предстала к тому времени, Фейнман сумел обнаружить в ней элементы, очень близкие к классическим понятиям. Частица по-прежнему переходит из точки в точку вдоль одного из путей. Разница «только» в том, что отдельный путь характеризуется не вероятностью, а амплитудой вероятности.

Итак, первое предположение Фейнмана состоит в том, что пути являются альтернативами для перехода. Это предположение требует количественного уточнения. Фейнман дает его, предполагая, что амплитуда вероятности каждого пути выражается через его действие формулой (1.4). Далее он делает второе, крайне существенное предположение: отдельные пути являются интерферирующими альтернативами. Это значит, что приписывать им вероятности бессмысленно. Это значит, что при расчете вероятности перехода из точки в точку должно действовать не правило сложения вероятностей, а правило сложения амплитуд вероятности. В результате получается формула (1.3). Основанная на этой формуле теория эквивалентна обычной формулировке квантовой механики (доказательство эквивалентности см. в [11, 12]).

Однако именно в этом пункте возникает вопрос, в котором основано все содержание данной части книги. *Всегда ли пути как альтернативы являются интерферирующими?* Не может ли быть таких условий, при которых эти альтернативы становятся несовместимыми, так что следует характеризовать их не амплитудами, а вероятностями?

Ответ очевиден: все пути являются интерферирующими альтернативами для перехода из точки в точку в том и только в том случае, если по условиям эксперимента нет никакой возможности получить информацию о том, по какому пути совершался переход. Если же во время перехода системы из одной точки в другую со-

вершалось *измерение*, которое дает информацию (хотя бы частичную) о пути перехода, то это утверждение неверно и формулу (1.3) следует заменить другой. На этом основан подход к теории непрерывных измерений, который мы начинаем излагать со следующего параграфа.

Прежде чем перейти к изложению интегрирования по путям, отметим, что теория амплитуд и квантовых альтернатив может иметь более широкую область применения, чем только интегрирование по путям. В некоторых случаях удобно или по физическим соображениям естественно в качестве альтернатив некоторого физического процесса рассматривать не пути, а некоторые другие наборы состояний. При этом на такие наборы практически не накладывается никаких ограничений. Сами наборы состояний (альтернатив) могут быть произвольными или почти произвольными. Они могут не совпадать ни с состояниями, рассматриваемыми в классической физике, ни с состояниями, с которыми мы привыкли иметь дело в квантовой физике (которые образуют гильбертово пространство и удовлетворяют уравнению Шредингера). Важно лишь, чтобы для выбранного набора альтернатив правильно были определены амплитуды переходов \*).

Например, в работах автора [36, 37] в качестве альтернатив для описания частиц использовались состояния, локализованные в единственной точке пространства-времени. Такие состояния не являются наблюдаемыми, но в качестве виртуальных они играют существенную роль при описании локальных взаимодействий частиц (как релятивистских, так и нерелятивистских). В книге [37] была намечена даже общая схема вычислений с произвольным набором *квантовых альтернатив (виртуальных состояний)*. При этом (в отличие от ортонормированного набора альтернатив) возникает новое понятие *нормировочной матрицы* или *нормировочного оператора*. Было показано, в частности, что причинный пропагатор можно рассматривать как нормировочный оператор для набора виртуальных состояний, локализованных в точке пространства-времени. В случае, если система обладает достаточно высокой симметрией, амплитуды переходов между виртуальными состояниями (альтернативами) можно найти с помощью теории представлений групп. В этом случае теория полностью или почти полностью определяется заданием группы. Особую роль при этом играют представления группы симметрии, индуцированные из различных характерных подгрупп. Примером может служить теория элементарных частиц в пространстве-времени Минковского (группа Пуанкаре), Галилея (группа Галилея) или де Ситтера (группа де Ситтера), построенная в работах [36, 37].

Понятие квантовых альтернатив или виртуальных состояний, на наш взгляд далеко не исчерпало себя. Наоборот, это понятие по сути дела только сейчас обнаруживает свою истинную глубину. В частности, оно позволяет прояснить связь между *проекторнозначными* и *операторнозначными мерами*, описывающими *измерения* [76, 79]. Если некоторое измерение описывается операторнозначной мерой, то всегда можно ввести и проекторнозначную меру. Однако для этого следует расширить пространство состояний, рассматривая не только реальные, но и виртуальные состояния. При этом, как показывают примеры, виртуальные состояния имеют не только формально-математический, но и глубокий физический смысл. В случае симметричных систем пространство виртуальных состояний преобразуется по *индуцированному представлению*, а подпространство реальных состояний — по некоторому его подпредставлению [37, 39, 40].

---

\* ) Заметим в этой связи, что *фейнмановские* пути хотя и напоминают состояния классической системы, но по сути дела отличаются от них. Классические пути являются экстремалами действия (при отсутствии сил — прямыми), а пути, образующие набор квантовых альтернатив, произвольны.



## § 2. Схема расчета непрерывного измерения

Во Введении (гл. 1 § 1) была сформулирована основная идея, лежащая в основе *расчета непрерывного измерения методом интегрирования по путям «в конечных пределах»*. Однако там рассматривался лишь частный случай измерения пути (слежения за координатой) системы. Теперь мы поставим задачу в случае произвольного непрерывного измерения. Для того чтобы не загромождать рассуждения техническими деталями, мы пока не будем говорить о том, как определяется интеграл по путям. Для постановки задачи об измерении достаточно интуитивного представления об этой операции. Более точные определения будут даны позднее.

Согласно гипотезе Фейнмана, амплитуда вероятности перехода системы из точки  $x$  в точку  $x'$  за время  $\tau$  равна интегралу по путям

$$A(x', x) = \int_{I(x', x)} d\{x\} e^{\frac{i}{\hbar} S\{x\}}. \quad (2.1)$$

Интеграл берется по семейству  $I(x', x)$  путей, соединяющих точки  $x$  и  $x'$  и параметризованных интервалом времени  $[0, \tau]$ . Последнее условие мы не отмечаем в обозначениях и в дальнейшем не будем оговаривать, так как на протяжении всей части I книги это условие будет оставаться неизменным. Однако интеграл (2.1) определяет амплитуду перехода лишь в том случае, если не существует принципиальной возможности получить даже частичную информацию о том, по какому пути происходит переход, так что пути являются *интерферирующими альтернативами*.

Предположим теперь, что на интервале времени  $[0, \tau]$  производится (вообще говоря, непрерывное) *измерение*, результат которого мы обозначим через  $\alpha$ . Мы будем рассматривать ситуацию (весьма общую), когда результат измерения  $\alpha$  содержит информацию о пути перехода. В самом простом случае результат  $\alpha$  может означать, что переход совершается по одному из путей некоторого семейства путей  $I_\alpha$ . Тогда альтернативами для перехода частицы из точки  $x$  в точку  $x'$  являются все пути, принадлежащие семейству  $I_\alpha$  и соединяющие точки  $x$  и  $x'$ . Обозначим семейство таких путей через

$$I_\alpha(x', x) = I_\alpha \cap I(x', x).$$

Если никакой другой информации в результате измерения  $\alpha$  не содержится, то пути семейства  $I_\alpha(x', x)$  являются интерферирующими альтернативами и амплитуда перехода из одной точки в другую должна вычисляться с помощью интеграла по этому семейству:

$$A_\alpha(x', x) = \int_{I_\alpha(x', x)} d\{x\} e^{\frac{i}{\hbar} S\{x\}}. \quad (2.2)$$



Может, однако, случиться (и это как раз наиболее типичный случай), что результат измерения  $\alpha$  не позволяет выделить семейство путей, по одному из которых происходит переход. Вместо этого  $\alpha$  означает, что некоторые пути перехода являются более вероятными, другие — менее вероятными. Это можно описать с помощью неотрицательной функции (точнее — функционала) на множестве всех путей  $\rho_\alpha \{x\}$ . Переход по пути  $\{x\}$  является тем более вероятным, чем больше число  $\rho_\alpha \{x\}$ . В этом случае амплитуду перехода из одной точки в другую следует вычислять с помощью интеграла по всем путям с соответствующим весом:

$$A_\alpha(x', x) = \int_{I(x', x)} d\{x\} \rho_\alpha \{x\} e^{\frac{i}{\hbar} S\{x\}}. \quad (2.3)$$

Нетрудно видеть, что формула (2.2) является частным случаем формулы (2.3). Он соответствует выбору *весовой функции*, равной единице на семействе  $I_\alpha$  и нулю вне его. Если весовая функция выбрана так, что она не сильно отличается от единицы для путей семейства  $I_\alpha$ , но быстро спадает за пределами этого семейства, то амплитуды, найденные по формулам (2.2) и (2.3), будут близки друг к другу. На практике можно пользоваться той из этих формул, которая удобнее для вычислений. Чаще всего удобным оказывается выбирать *весовую функцию гауссовского типа*, т. е. экспоненту от квадратичной формы, так как в этом случае легче вычислять интеграл по путям. Именно так мы будем поступать в дальнейшем при рассмотрении конкретных примеров. Следует заметить, однако, что выбор гауссовских весов на самом деле, по-видимому, является реалистическим при описании реальных измерений.

До сих пор предполагалось, что точки, в которых система начинает и заканчивает движение, точно известны. Реальной, однако, является и такая ситуация, когда *в начале и в конце известны лишь волновые функции (квантовые состояния)*. В этом случае амплитуду (2.3) следует свернуть с этими функциями при помощи интегрирования. Получившееся выражение

$$A_{\psi\alpha\psi} = \int dx' \int dx \psi'(x') A_\alpha(x', x) \psi(x) \quad (2.4)$$

есть амплитуда вероятности того, что система в момент  $t=0$  находится в состоянии  $\psi$ , в момент  $t=\tau$  — в состоянии  $\psi'$ , а на интервале  $[0, \tau]$  над ней производится измерение, которое дает результат  $\alpha$ .

В этом можно убедиться с помощью такого рассуждения. Пусть система находится в состоянии  $\psi$  в момент  $t=0$ . Это значит, что амплитуда вероятности того, что к этому моменту ее координата стала равной  $x$ , есть  $\psi(x)$ . Подсчитаем амплитуду вероятности того, что к моменту  $t=\tau$  координата системы станет равной  $x'$ . Будем рассматривать различные координаты в момент  $t=0$  как квантовые альтернативы. Переход в точку  $x'$  в момент  $\tau$  может произойти через любую из этих альтернатив  $x$ . Амплитуду вероятности перехода через каждую из альтернатив можно найти по правилу перемножения амплитуд. Пусть переход произошел через точку  $x$ . Амплитуда вероятности

попадания в эту точку (к моменту 0) равна  $\psi(x)$ ; амплитуда перехода из этой точки в точку  $x'$  (к моменту  $\tau$ ) равна  $A_\alpha(x', x)$ . Следовательно, амплитуда попадания в точку  $x'$  через альтернативу  $x$  равна произведению

$$\psi_{\alpha x}(x') = A_\alpha(x', x) \psi(x).$$

По условиям эксперимента нет возможности определить, какая именно из альтернатив  $x$  реализовалась. Следовательно, полную амплитуду попадания в точку  $x'$  следует вычислять как сумму всех «парциальных» амплитуд:

$$\psi_\alpha(x') = \int dx A_\alpha(x', x) \psi(x).$$

Это означает, что в момент  $t=\tau$  система окажется в состоянии, описываемом волновой функцией  $\psi_\alpha$ . Теперь следует поставить вопрос: какова амплитуда вероятности того, что система окажется в момент  $\tau$  в некотором наперед заданном состоянии  $\psi'$ . Согласно аксиоматике квантовой механики, такая амплитуда выражается *скалярным произведением* двух состояний:

$$A_{\psi'\alpha}\psi = (\psi', \psi_\alpha) = \int dx' \psi'^*(x') \psi_\alpha(x'),$$

что совпадает с формулой (2.4).

Рассмотрим еще более общую ситуацию, когда начальное состояние измеряемой системы описывается *матрицей плотности*. Чтобы описать эту ситуацию, нам понадобится оператор, переводящий состояние  $\psi$  в состояние  $\psi_\alpha$ . Обозначим такой оператор через  $A_\alpha$ , так что по определению

$$\psi_\alpha(x') = (A_\alpha\psi)(x') = \int dx A_\alpha(x', x) \psi(x). \quad (2.5)$$

Пусть теперь до измерения, т. е. в момент 0, состояние системы описывается матрицей плотности  $P$ . Всегда найдется такой набор состояний  $\psi_i$ , что матрица плотности диагональна относительно этого набора,

$$P = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|.$$

Состояние, описываемое такой матрицей плотности, можно интерпретировать в терминах чистых состояний  $|\psi_i\rangle$  следующим образом. Система находится в одном из чистых состояний  $|\psi_i\rangle$ , но неизвестно точно, в каком из них. Вероятность того, что система находится в состоянии  $|\psi_i\rangle$ , равна  $p_i$ .

Эта интерпретация позволяет применить то описание измерения, которое развито для чистых состояний. Если в момент 0 система находится в чистом состоянии  $|\psi_i\rangle$ , то после измерения, давшего результат  $\alpha$ , в момент  $\tau$  она будет в состоянии  $A_\alpha|\psi_i\rangle$  (это было показано выше в координатном представлении). Поскольку в момент 0 система находится в состоянии  $|\psi_i\rangle$  с вероятностью  $p_i$ , то после измерения, в момент  $\tau$ , она будет находиться в состоянии  $A_\alpha|\psi_i\rangle$  с вероятностью  $p_i$ . Следовательно, матрица плотности, описывающая состояние системы в момент  $\tau$  после измерения, равна

$$P_\alpha = \sum_i p_i A_\alpha |\psi_i\rangle \langle \psi_i| A_\alpha^\dagger = A_\alpha P A_\alpha^\dagger. \quad (2.6)$$

Наконец, вероятность в момент  $\tau$  обнаружить систему в состоянии с матрицей плотности  $P'$  равна

$$W_{P'\alpha P} = \text{Tr}(P' P_\alpha) = \text{Tr}(P' A_\alpha P A_\alpha^\dagger). \quad (2.7)$$

Таким образом, эта величина представляет собой вероятность получить результат  $\alpha$  при непрерывном измерении на интервале  $[0, \tau]$  при условии, что в моменты  $t=0$ ,  $\tau$  система находится соответственно в состояниях  $P$ ,  $P'$ .



**З а м е ч а н и е.** Оператор  $A_\alpha$  описывает эволюцию системы при наличии измерения точно так же, как обычный оператор эволюции

$$U_\tau = e^{-\frac{i}{\hbar} \tau H}$$

описывает эволюцию при отсутствии измерения. Оператору  $A_\alpha$ , однако, нельзя сопоставить никакого гамильтониана, и для него нельзя записать дифференциального уравнения типа уравнения Шредингера, справедливого для обычного оператора эволюции:

$$i\hbar \frac{d}{d\tau} U_\tau = H U_\tau.$$

При наличии измерения динамика системы, вообще говоря, уже не описывается локально во времени. Описание становится глобальным, и один из формализмов, пригодных для такого глобального описания, — это формализм путей.

Формула (2.3) или в более общем случае (2.4) дает амплитуду вероятности перехода из одного состояния в другое при условии, что во время перехода производится (вообще говоря, непрерывное) измерение. В то же время амплитуду  $A_{\psi'\alpha\psi}$  можно рассматривать как амплитуду вероятности сложного события, состоящего из трех событий: 1) в момент 0 состояние системы есть  $\psi$ ; 2) на интервале  $[0, \tau]$  производится измерение, которое дает результат  $\alpha$ ; 3) в момент  $\tau$  состояние системы есть  $\psi'$ . Чтобы понять, как использовать эту амплитуду дальше, следует включить эту цепочку событий в более длинную цепочку и рассматривать как *альтернативу*. При этом из физических соображений (из анализа условий эксперимента) следует выяснить, является ли тот набор альтернатив, в который входит альтернатива  $(\psi', \alpha, \psi)$ , интерферирующим. После этого будет ясно, следует ли и далее оперировать с амплитудой  $A_{\psi'\alpha\psi}$  или перейти к вероятности

$$P_{\psi'\alpha\psi} = |A_{\psi'\alpha\psi}|^2. \quad (2.8)$$

В принципе возможны оба варианта. Мы, однако, будем рассматривать лишь случай, когда цепочка событий  $(\psi', \alpha, \psi)$  представляет собой альтернативу, несовместимую с другими альтернативами. Это значит, что имеющаяся измерительная аппаратура и организация измерений допускают возможность выяснить не только, каков результат  $\alpha$  непрерывного измерения, но и каковы состояния  $\psi, \psi'$ . Это возможно, например, если в моменты 0,  $\tau$  проводятся измерения полного набора наблюдаемых, для которого  $\psi, \psi'$  являются собственными состояниями. Тогда по результатам этих измерений однозначно определяется, какие именно состояния  $\psi, \psi'$  реализовались. В частности, это могут быть и измерения координаты. Впоследствии мы рассмотрим случай, когда координата измеряется с конечной точностью. Пока же предположим, что координата в моменты 0,  $\tau$  измеряется точно. Тогда система переходит в собственные состояния наблюдаемой координаты

$$\psi(x) = \delta(x - x), \quad \psi'(x') = \delta(x' - x'),$$



и по формуле (2.4) мы получаем  $A_{\psi' \alpha \psi} = A_{\alpha}(x', x)$ . Таким образом, амплитуду  $A_{\alpha}(x', x)$  можно считать частным случаем амплитуды  $A_{\psi' \alpha \psi}$ .

Такой в общих чертах является схема расчета непрерывного измерения методом интегрирования по путям. Для того чтобы ее можно было применять для расчета конкретных измерений, следует еще 1) описать процедуру интегрирования по путям и 2) научиться результаты непрерывных измерений формулировать в терминах путей. Первое будет сделано в следующем параграфе. Второе было уже сделано для одного случая (непрерывное слежение за координатой или измерение пути) в гл. 1, § 1 и будет сделано для спектральных измерений в следующей главе. Однако общего решения этой задачи, разумеется, нет. Каждый раз требуется анализировать *измерительный прибор* и выражать ту информацию, которую он дает, в терминах путей.

В этой связи отметим, что пути образуют лишь один из *наборов квантовых альтернатив* среди бесконечного множества различных наборов. Правда, пути как альтернативы, вероятно, будут удобны для анализа многих непрерывных измерений. Однако в некоторых случаях могут оказаться полезными совсем другие наборы альтернатив. И уж во всяком случае для описания мгновенных измерений удобны другие наборы. При этом общая схема рассуждений остается примерно такой же. Многие полезные наборы альтернатив можно получить, рассматривая группу симметрии системы и ее индуцированные представления (см. в этой связи обсуждение в конце § 1).

### § 3. Фейнмановский интеграл по путям

В предыдущем параграфе было показано, что расчет непрерывного измерения сводится к вычислению некоторого интеграла по путям. В этом параграфе мы приведем кратко самые основные сведения из теории таких интегралов. Отметим сразу, что *фейнмановский интеграл по путям*, применяемый в квантовой физике, определяется с помощью предельной процедуры, которая не может рассматриваться как частный случай общего определения интеграла или *меры*, используемого в математике. Это иногда выражают словами: *фейнмановской меры* на множестве путей не существует (в отличие от *винеровской меры* на множестве путей, используемой в теории информации и для описания процессов типа броуновского движения, или диффузии). Тем не менее, чтобы не усложнять терминологию, физики пользуются термином «фейнмановский интеграл по путям». Будем следовать этой традиции и мы.

К этому можно добавить, что *фейнмановский интеграл по путям*, а точнее, его обобщение — *континуальный* или *функциональный интеграл* (который иногда также называют интегралом по путям, но который по существу является интегралом по полям) — хотя и не имеет статуса интеграла в строгом математическом смысле,

тем не менее является в современной квантовой теории полезным инструментом. В некоторых областях квантовой теории поля он фактически вытеснил привычный ранее операторный формализм. Этому не препятствует то обстоятельство, что точно вычисляются лишь так называемые *гауссовы континуальные интегралы*, порождаемые квадратичным действием. Оказывается, что одни лишь гауссовы интегралы позволяют решать практически все задачи, возникающие в квантовой теории. Это связано с тем, что специальный прием, называемый теорией возмущений, позволяет фактически свести любой континуальный интеграл к интегралу гауссова типа. Преимущество метода интегрирования по путям (или полям), объясняющее неуклонное расширение сферы его применения — это удивительная наглядность, особенно бросающаяся в глаза при сравнении с операторным методом. Действительно, в методе континуального интеграла фигурируют непосредственно привычные классические образы — пути или поля, что делает постановку задач и вычисления прозрачными на всех этапах. Мы видели это в предыдущем параграфе на примере анализа непрерывных измерений.

*Интеграл по путям* \*) в квантовой механике символически записывается в виде

$$A(x', x) = \int d\{x\} e^{\frac{i}{\hbar} S\{x\}}, \quad (3.1)$$

где  $S\{x\}$  — действие вдоль пути  $\{x\}$ , равное интегралу от лагранжиана  $L$ :

$$S\{x\} = \int_0^\tau dt L(x(t), \dot{x}(t), t).$$

Определить интеграл по путям точно можно различными способами. Простейший из них состоит в том, что 1) рассматриваются сначала не любые пути, а ломаные, состоящие из конечного числа прямолинейных отрезков, и определяется интеграл по таким ломаным, а затем 2) находится предел при устремлении числа звеньев ломаных к бесконечности.

Ломаная, или кусочно-прямолинейный путь, определяется так, как показано на рисунке (интервалы  $t_i - t_{i-1}$  все равны  $\Delta t = \tau/N$ ). Ясно, что такая ломаная определяется своими узлами  $x_i = x(t_i)$ . При этом действие, вычисленное для ломаной, оказывается функцией от этих узлов. Для фиксированного числа звеньев  $N$  определяется конечнократный интеграл

$$A_N(x', x) = J_N \int dx_1 \dots \int dx_{N-1} e^{\frac{i}{\hbar} S(x_0, x_1, \dots, x_N)}.$$

---

\*) Для простоты мы рассматриваем одномерную систему, однако большинство формул тривиально обобщаются на многомерный случай. Позднее этот случай будет рассмотрен явно.

Интеграл по путям определяется как предел

$$A(x', x) = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N(x', x). \quad (3.2)$$

Нормировочная постоянная  $J_N$ , зависящая только от  $N$ , выбирается так, чтобы предел существовал.

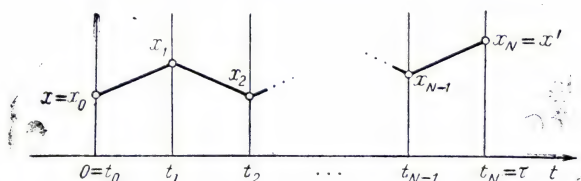


Рис. 4.

Рассмотрим простой случай свободной частицы:  $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ . Действие, вычисленное для ломаной, принимает вид

$$S(x_0, x_1, \dots, x_N) = \frac{m}{2\Delta t} \sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1})^2.$$

В качестве нормировочной постоянной следует выбрать \*)

$$J_N = \left( \frac{mN}{2\pi i \hbar \tau} \right)^{N/2}.$$

Тогда конечнократная аппроксимация интеграла по путям принимает вид

$$A_N(x', x) = \int dx_1 \int dx_2 \dots \int dx_{N-1} \cdot K_{\Delta t}(x_N, x_{N-1}) \times \\ \times K_{\Delta t}(x_{N-1}, x_{N-2}) \dots K_{\Delta t}(x_1, x_0),$$

где обозначено

$$K_{\Delta t}(x'', x') = \left( \frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{1/2} e^{\frac{i m}{2 \hbar \Delta t} (x'' - x')^2}. \quad (3.3)$$

Нетрудно доказать непосредственно, что эта функция удовлетворяет условию

$$\int dx' K_{t''-t'}(x'', x') K_{t'-t}(x', x) = K_{t''-t}(x'', x), \quad (3.4)$$

\*) Мы рассматриваем явно только случай одномерной системы. Если число степеней свободы больше, то на каждую степень свободы приходится такой же нормировочный множитель, так что полный нормировочный множитель получается возведением в соответствующую степень.



в силу которого амплитуда  $A_N(x', x)$  при любом  $N$ , а значит, и в пределе  $N \rightarrow \infty$  равна

$$A(x', x) = K_\tau(x', x) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \tau}\right)^{1/2} e^{\frac{im}{2\hbar\tau}(x'-x)^2}. \quad (3.5)$$

Условие (3.4) доказывается с помощью формулы для стандартного гауссова интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ax^2+bx} = \left(\frac{\pi}{-a}\right)^{1/2} e^{-\frac{b^2}{4a}}, \quad (3.6)$$

которая с помощью аналитического продолжения распространяется и на комплексные значения параметров  $a, b$ . Однако соотношение (3.4) справедливо не только для функции вида (3.3), но и для более широкого класса функций. Оно играет важную роль в теории интегралов по путям и носит название *условия Эйнштейна—Смолуховского* или *условия Чепмена—Колмогорова*.

Это соотношение обобщается на многомерный случай и имеет естественную интерпретацию в терминах амплитуд распространения. Если  $K_{\Delta t}(x'', x')$  — амплитуда вероятности (или вероятность) перехода системы из точки  $x'$  в точку  $x''$  за время  $\Delta t$ , то соотношение (3.4) означает, что эта амплитуда (вероятность) подчиняется обычным правилам сложения и умножения амплитуд (вероятностей). Действительно, при переходе из точки  $x$  в точку  $x''$  в течение интервала времени  $[t, t']$  система в некоторый промежуточный момент времени  $t' \in [t, t']$  должна пройти через ту или иную точку  $x'$ . Тогда переход из  $x$  в  $x''$  может рассматриваться в два этапа: сначала из  $x$  в  $x'$  за интервал времени  $[t, t']$ , а затем из  $x'$  в  $x''$  за интервал  $[t', t']$ . Амплитуда (вероятность) перехода через определенную точку  $x'$  находится по правилу умножения амплитуд (вероятностей), а полная амплитуда перехода находится затем суммированием по всем  $x'$  на основании правила сложения амплитуд (вероятностей). Это и дает соотношение (3.4).

В случае, если функция  $K_{\Delta t}(x'', x')$  является действительной положительной и определяет вероятность, соотношение Эйнштейна—Смолуховского служит основой для определения интеграла по путям (меры в пространстве путей) в строгом математическом смысле (см., например, [13, 16, 21]). Если функция  $K_{\Delta t}(x'', x')$  является комплексной и определяет амплитуду вероятности (в квантовой теории), то определение меры оказывается, вообще говоря, невозможным. Однако можно определить интеграл по путям с помощью предела конечнократного интеграла. В простом случае свободной частицы, когда амплитуда распространения имеет вид (3.3), как мы только что видели, интеграл по путям легко вычисляется и равен (3.5). Можно непосредственно проверить, что получающаяся таким образом амплитуда  $A(x', x)$  удовлетворяет (по аргументам  $x', \tau$ ) уравнению Шредингера. Так, конечно, и должно быть, потому что если свободная частица

в момент  $t=0$  находится в точке  $x$ , то в момент  $t=\tau$  ее волновая функция равна  $\psi(\tau, x')=A(x', x)$ .

В более сложном случае частицы в силовом поле,  $L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x, t)$ , действие на ломаной, аппроксимирующей путь, имеет вид \*)

$$S(x_0, x_1, \dots, x_N) = \frac{m}{2\Delta t} \sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1})^2 - \Delta t \sum_{k=1}^N U_k.$$

Здесь  $U_k$  есть значение потенциальной энергии  $U(x, t)$  в некоторой точке  $k$ -го звена ломаной. Однако предел при увеличении числа звеньев ломаной не изменится, если любым способом менять эту точку (в пределах одного звена). В частности, можно принять  $U_k = U(x_k, t_k)$ . Тем не менее найти этот предел в случае произвольной потенциальной энергии не удастся. В следующем параграфе мы рассмотрим частный случай гармонического осциллятора, движущегося под действием силы.

На практике часто более удобным бывает определение интеграла по путям не в координатном, а в фазовом пространстве. Для того чтобы вывести его, выразим функционал действия не через лагранжиан, зависящий от координат и скоростей (в одномерном случае — от одной координаты и скорости), а через гамильтониан, зависящий от координат и импульсов:

$$L = p\dot{x} - H(x, p), \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}; \quad S\{x\} = \int p dx - \int_0^\tau dt H(x, p). \quad (3.7)$$

Теперь запишем для амплитуды перехода вместо (3.1) выражение в виде интеграла по путям в фазовом пространстве  $\{x, p\}$ , т. е. по кривым  $\{x\}$  и  $\{p\}$ :

$$A(x', x) = \int d\{x\} d\{p\} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ \int p dx - \int_0^\tau dt H(x, p) \right] \right\}. \quad (3.8)$$

Чтобы придать смысл интегралу в фазовом пространстве (3.8), определим его, как и прежде, через конечнократные аппроксимации, т. е. формулой (3.2). Для аппроксимации условимся выбирать кривую в координатном пространстве  $\{x\}$  так же, как и раньше, т. е. кусочно-прямолинейной и непрерывной (ломаной). А кривую в пространстве импульсов  $\{p\}$  будем аппроксимировать кусочно-постоянной (и, следовательно, разрывной). Как видно из рисунка 5, кривая  $\{x\}$  при этом определяется своими значениями в узлах ломаной  $x_k$ , а кривая  $\{p\}$  — своими значениями на интервалах  $[t_{k-1}, t_k]$ , которые мы обозначим  $p_k$ . Следует помнить, что величины  $p_k$  никак не связаны с величинами  $x_k$ , иными словами,

\*) Нормировочная постоянная  $J_N$  остается точно такой же, как и в свободном случае, так как она по условию не зависит от действия (иначе интеграл по путям был бы полностью произвольным).

постоянные на интервалах разбиения импульсы не связаны с постоянными на интервалах разбиения скоростями. Теперь определим конечномерную аппроксимацию интеграла (3.8) как интеграл по  $x_k$  и  $p_k$ :

$$A_N(x', x) = \int dx_1 \dots \int dx_{N-1} \int \frac{dp_1}{2\pi\hbar} \dots \int \frac{dp_N}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^N [p_k(x_k - x_{k-1}) - H(x_k, p_k)] \right\}.$$

Тем самым интеграл по путям в фазовом пространстве полностью определен. Обобщение на многомерный случай почти очевидно.

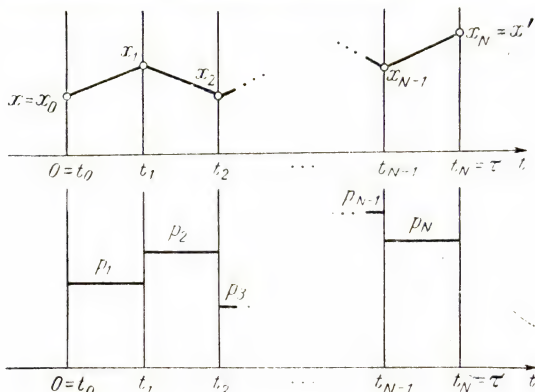


Рис. 5.

Нетрудно убедиться непосредственно, что определения интегралов по путям в координатном и фазовом пространствах совпадают в случае лагранжиана вида  $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x, t)$ . Гамильтониан в этом случае равен  $H = \frac{1}{2m} p^2 + U(x, t)$ , и конечнократная аппроксимация интеграла по путям в фазовом пространстве равна

$$A_N(x', x) = \int dx_1 \dots \int dx_{N-1} \exp \left( -\frac{i \Delta t}{\hbar} \sum_{k=1}^N U_k \right) \times \\ \times \prod_{j=1}^N \int \left( \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \right) \exp \left\{ -\frac{i \Delta t}{2m\hbar} p_j^2 + \frac{i(x_j - x_{j-1})}{\hbar} p_j \right\}.$$

Интегралы по переменным  $p_j$  здесь все являются гауссовскими и могут быть вычислены по формулам (3.6). Остается лишь кратный интеграл по  $x_k$ , и легко убедиться, что он совпадает с конечнократной аппроксимацией интеграла по путям в пространстве координат, включая нормировку. Как видим, нормировка интеграла в фазовом пространстве имеет более простой вид. Кроме



того, она имеет и естественную физическую интерпретацию, так как каждая мера в фазовом пространстве  $dx_k dp_k$  делится на множитель  $2\pi\hbar$ , представляющий собой объем «элементарной ячейки» фазового пространства (квант действия).

#### § 4. Интеграл по путям для гармонического осциллятора

Вычислим интеграл по путям для квадратичного потенциала  $U(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$ , т. е. в случае гармонического осциллятора. Действие для такой системы имеет вид

$$S\{x\} = \int_0^\tau dt \left[ \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right].$$

Действие является функционалом от пути  $\{x\}$  и достигает минимума на классической траектории осциллятора, удовлетворяющей уравнению и граничным условиям

$$\ddot{\eta} + \omega^2 \eta = 0, \quad \eta(0) = x, \quad \eta(\tau) = x'. \quad (4.1)$$

Представим путь в виде суммы

$$x(t) = \eta(t) + z(t).$$

Тогда отклонение от классического пути  $z(t)$  удовлетворяет однородным граничным условиям  $z(0) = z(\tau) = 0$ . Подставляя выражение для пути в виде суммы в интеграл действия и производя интегрирование по частям, нетрудно убедиться, что действие также представляется в виде суммы

$$S\{x\} = S\{\eta\} + S\{z\} \quad (4.2)$$

(перекрестные члены исчезают в силу квадратичности потенциала). Используя это выражение для действия в интеграле по путям (3.1), мы получаем возможность множитель  $\exp[(i/\hbar) S\{\eta\}]$  вынести за знак этого интеграла. Остается лишь интеграл по  $\{z\}$ , т. е. по путям с нулевыми граничными условиями:

$$A(x', x) = \int_x^{x'} d\{x\} e^{\frac{i}{\hbar} S\{x\}} = A(0, 0) e^{\frac{i}{\hbar} S\{\eta\}}, \quad (4.3)$$

$$A(0, 0) = \int_0^0 d\{z\} e^{\frac{i}{\hbar} S\{z\}}.$$

Можно считать, что формула (4.3) уже есть результат вычисления интеграла по путям. Действительно, действие на классическом пути  $S\{\eta\}$  легко вычисляется явно, а остающийся интеграл по путям  $A(0, 0)$  уже не зависит от  $x, x'$ . Таким образом, неопределенным остается лишь множитель, не зависящий от  $x, x'$ .

Этот множитель можно вычислить с помощью *спектрального представления интеграла по путям* [12]. Мы рассмотрим спектральное представление в более общем случае, так как это понадобится нам в дальнейшем.

Вычислим интеграл по путям для *гармонического осциллятора*, находящегося под действием *внешней силы*  $F = F(t)$ :

$$S\{x\} = \int_0^\tau dt \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + Fx \right]. \quad (4.4)$$

Как и для свободного осциллятора, сделаем для этого замену переменной, разлагая  $x = \eta + z$  и переходя к интегрированию по  $\{z\}$ . Заметим, что мы по-прежнему подчиняем траекторию  $\eta$  уравнению (4.1) с нулевой правой частью. Как и для свободного осциллятора, действие при этом разбивается в сумму (4.2), а интеграл по путям представляется в виде произведения (4.3). Теперь, однако, во всех этих формулах следует использовать действие вида (4.4), содержащее внешнюю силу.

Для вычисления интеграла  $A(0, 0)$  разложим путь  $z(t)$  и силу  $F(t)$  на интервале  $[0, \tau]$  в ряд Фурье:

$$z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \Omega_n t, \quad F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin \Omega_n t, \quad (4.5)$$

где введено обозначение, которое в дальнейшем будет постоянно использоваться:

$$\Omega_n = \frac{n\pi}{\tau}.$$

Для пути  $z$ , который имеет нулевые граничные значения, разложение (4.5) является естественным. Однако и силу  $F$ , значения которой на концах интервала  $[0, \tau]$  произвольны, также можно разложить в ряд такого типа. Разница состоит лишь в том, что при ненулевых граничных значениях коэффициенты ряда убывают медленнее.

Подставим разложения (4.5) в выражение для действия. Тогда действие выразится как функция от коэффициентов Фурье:

$$S\{z\} = S(c_1, c_2, \dots) = \frac{\tau}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{m}{2} c_n^2 (\Omega_n^2 - \omega^2) + c_n F_n \right],$$

и интеграл по путям можно записать как интеграл по этим коэффициентам:

$$A(0, 0) = \int_0^0 d\{z\} e^{\frac{i}{\hbar} S\{z\}} = J \int_{-\infty}^{\infty} dc_1 \int_{-\infty}^{\infty} dc_2 \dots e^{\frac{i}{\hbar} S(c_1, c_2, \dots)}. \quad (4.6)$$

Возможность такого *спектрального представления интеграла по путям* фактически следует из того, что между множеством непре-

ривных путей и множеством последовательностей  $c_1, c_2, \dots$  имеется взаимно однозначное соответствие. Для формального доказательства следует ломаную с узлами  $0=z_0, z_1, \dots, z_{N-1}, z_N=0$  разложить в ряд Фурье (4.5) и в конечномерной аппроксимации интеграла по путям  $A_N(0, 0)$  перейти от интегрирования по  $z_1, \dots, z_{N-1}$  к интегрированию по первым коэффициентам разложения  $c_1, \dots, c_{N-1}$ . При этом можно в принципе найти численный множитель  $J$  (как предел при  $N \rightarrow \infty$  детерминанта перехода к новым переменным интегрирования). Мы, однако, найдем его иначе.

Интеграл (4.6) представляет собой по существу (бесконечное) произведение однократных интегралов. Поскольку каждый из них относится к классу гауссовых интегралов, все они могут быть вычислены по формуле (3.6). Это дает

$$A(0, 0) = J \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4\pi i \hbar}{\tau m (\Omega_n^2 - \omega^2)} \right)^{1/2} \exp \left( \frac{i\tau}{4m\hbar} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n^2}{\omega^2 - \Omega_n^2} \right).$$

Зависимость этого бесконечного произведения от  $\omega$  можно сделать явной с помощью формулы Эйлера, которая в наших обозначениях выглядит так:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\Omega_n^2} \right) = \frac{\sin \omega \tau}{\omega \tau}. \quad (4.7)$$

Оставшуюся часть бесконечного произведения можно включить в нормировочную постоянную. Наконец, показатель экспоненты, как нетрудно проверить, есть просто  $(i/\hbar) S\{\zeta\}$ , где  $\zeta$  — решение задачи

$$m\ddot{\zeta} + m\omega^2\zeta = F, \quad \zeta(0) = \zeta(\tau) = 0.$$

(Для этого достаточно найти решение этой задачи в виде разложения в ряд Фурье и подставить это решение в интеграл действия.) Вместе с (4.3) это дает

$$A(x', x) = J' \left( \frac{\omega \tau}{\sin \omega \tau} \right)^{1/2} e^{\frac{i}{\hbar} [S\{\eta\} + S\{\zeta\}]}.$$

В показателе экспоненты здесь стоит, как легко убедиться, величина  $(i/\hbar) S\{\xi\}$ , где  $\xi$  — траектория классического осциллятора

$$m\ddot{\xi} + m\omega^2\xi = F, \quad \xi(0) = x, \quad \xi(\tau) = x'. \quad (4.8)$$

Постоянную  $J'$  можно найти, рассматривая частный случай  $\omega=0, F=0$ . При этом осциллятор вырождается в свободную частицу, интеграл по путям для которой был вычислен раньше. Окончательно получаем

$$A(x', x) = \left( \frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega \tau} \right)^{1/2} e^{\frac{i}{\hbar} S\{\xi\}}. \quad (4.9)$$

Это выражение для интеграла по путям осциллятора, движущегося под действием произвольной силы. Впоследствии нам понадобится



как это выражение, так и промежуточная формула (4.6) — спектральное представление интеграла по путям. Фигурирующее в формуле (4.9) классическое действие может быть найдено явно в виде квадратур (см., например, [12]).

Сведений об интегралах по путям, приведенных в последних двух параграфах, вполне достаточно для тех приложений, которые будут рассмотрены в следующих главах. Однако для того чтобы дать читателю более широкое представление об этой технике, мы рассмотрим в Приложении А более общий случай функционального интеграла, определяя его хотя и более формальным, зато гораздо более простым способом.

## Глава 3

### ИЗМЕРЕНИЕ ПУТИ ОСЦИЛЛЯТОРА

В предыдущей главе была сформулирована схема расчета произвольного непрерывного измерения при помощи интегрирования по путям «в конечных пределах». Применим теперь эту процедуру для расчета измерения пути осциллятора или, иначе говоря, непрерывного слежения за координатой осциллятора. В этом случае схема применения интегрирования по путям наиболее наглядна, однако для вычислений это не самый простой случай. В следующей главе будет рассмотрен другой класс измерений в осцилляторе — спектральные измерения, — который приводит к более простым вычислениям.

Читатель может при желании пропустить эту главу и сразу перейти к следующей, без ущерба для понимания. Читатель, который интересуется лишь принципиальными вопросами, но не приложениями, может прочесть из этой главы лишь § 6, в котором на примере измерения пути показано, как интегрирование по путям «в конечных пределах» автоматически учитывает редукцию состояния (редукцию волнового пакета), происходящую при измерении. Для понимания этого параграфа достаточно тех сведений, которые содержатся в предыдущих главах (в § 1 гл. 1 и в §§ 1—3 гл. 2).

#### § 1. Интеграл по коридору путей для осциллятора

Задача об измерении пути произвольной квантовомеханической системы или о слежении за ее координатой была поставлена еще во Введении (§ 1 гл. 1) и уточнена в § 2 гл. 2. Расчет амплитуды в этом случае сводится к интегрированию по коридору путей конечной ширины. Действительно, амплитуда перехода системы из точки  $x$  в момент  $t=0$  в точку  $x'$  в момент  $t=\tau$  равна интегралу по путям

$$A(x', x) = \int_{I(x', x)} d\{x\} e^{\frac{i}{\hbar} S\{x\}},$$

соединяющим эту точку, а если во время перехода производится измерение пути, то следует ограничить область интегрирования в соответствии с результатами измерения. Если измерение пути производится с конечной точностью  $\Delta a$  и результат измерения  $\alpha$  выражается коридором путей  $I_\alpha$ , то амплитуда перехода выражается интегралом по тем путям, которые принадлежат этому коридору:

$$A_\alpha(x', x) = \int_{I_\alpha(x', x)} d\{x\} e^{\frac{i}{\hbar} S\{x\}},$$

или интегралом по всем путям с соответствующим весовым множителем

$$A_\alpha(x', x) = \int d\{x\} \rho_\alpha\{x\} e^{\frac{i}{\hbar} S\{x\}}. \quad (1.1)$$

Эта амплитуда есть амплитуда вероятности получить в качестве результата измерения  $\alpha$ . Если учесть, что перед измерением и после него система может находиться в произвольном квантовом состоянии, то следует еще проинтегрировать амплитуду (1.1) по аргументам  $x, x'$ , предварительно умножив на волновые функции этих состояний. Однако этим уточнением мы займемся позднее, сейчас же будем считать, что положения системы  $x, x'$  до и после измерения точно известны, и пользоваться амплитудой (1.1). Посмотрим, чему равна эта амплитуда в случае гармонического осциллятора.

Динамические свойства гармонического осциллятора описываются действием

$$S\{x\} = \int_0^\tau dt \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + Fx \right] \quad (1.2)$$

и интеграл по всем путям для этой системы был вычислен и подробно проанализирован в §§ 4, 6 гл. 2. Теперь нам следует вычислить интеграл по коридору путей для той же системы. Для этого прежде всего следует определить понятие коридора путей.

Это можно сделать различными способами, и по существу разные способы будут соответствовать разным измерительным приборам. Однако практически разница между этими вариантами не так уж велика, поэтому основные свойства такого типа измерений можно проанализировать, воспользовавшись любым определением. Будем характеризовать измерение пути его точностью  $\Delta a$  (которая соответствует ширине коридора). Результат измерения — это некоторый путь  $\{a\} = \{a(t) \mid 0 \leq t \leq \tau\}$ . Если точность измерений зафиксировать, то результат измерения и соответствующий коридор путей однозначно характеризуются траекторией  $\{a\}$ . Таким образом,  $\alpha = \{a\}$ . Одно из очевидных определений коридора может быть дано следующим образом. Будем говорить, что путь  $\{x\}$  принадлежит коридору  $I_{\{a\}}$ , если  $|x(t) - a(t)| \leq \Delta a$  при

всех  $t \in [0, \tau]$ . Это означает, что путь, лежащий в коридоре, ни в какой момент не может отличаться от среднего пути больше, чем на  $\Delta a$ . Однако с равным правом может претендовать на роль определения коридора и такое определение:

$$\{x\} \in I_{\{a\}}, \text{ если } \langle (x - a)^2 \rangle \leq \Delta a^2, \quad (1.3)$$

где угловыми скобками обозначено среднее по времени:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt v(t).$$

Определение (1.3) означает, что пути, лежащие в коридоре, могут отклоняться от среднего пути сколь угодно сильно, однако чем сильнее отклонение, тем на более короткое время оно допускается, так что среднее квадратичное отклонение не превышает  $\Delta a$ . Ясно, что то или иное определение можно выбрать лишь после анализа измерительной системы, измеряющей путь. Однако для оценочных расчетов можно взять любое определение. Выберем определение через среднее квадратичное отклонение, приводящее к наиболее простым вычислениям \*). Теперь мы можем определить амплитуду интегрированием по коридору  $I_{\{a\}}$ . Однако из тех же соображений простоты расчета воспользуемся вместо этого формулой (1.1), выбирая весовую функцию так, чтобы она быстро убывала за пределами коридора. Вычисления сильно упрощаются, если выбрать эту функцию в виде экспоненты от квадратичной формы:

$$\rho_{\{a\}}(x) = \exp\left(-\frac{\langle (x - a)^2 \rangle}{\Delta a^2}\right). \quad (1.4)$$

Причина упрощения очевидна. Она состоит в том, что при такой весовой функции возникающий интеграл по путям принадлежит к гауссовому типу. Однако вместе с тем такой выбор безусловно точнее описывает большинство реальных приборов, чем выбор коридора с резкими краями. Действительно, если измерение пути дает результат  $\{a\}$ , то это означает, что «истинный» путь с большой вероятностью лежит близко к  $\{a\}$ , при удалении от него вероятность медленно уменьшается, а при удалении на  $\Delta a$  (точность измерений) начинает падать очень быстро. Однако трудно представить себе, чтобы это распределение вероятности было разрывным. Можно привести более серьезные доводы в пользу квадратичного распределения (1.4). Однако это потребовало бы квантового анализа измерительного прибора и увело слишком далеко в сторону, не давая практически ничего нового в том приближении, в котором мы будем производить вычисления.

Итак, амплитуду вероятности для измерения пути гармонического осциллятора будем искать по формуле (1.1), в которую сле-

---

\*) Впрочем, интуитивно кажется, что работа большинства приборов соответствует именно этому определению.



дует подставить действие (1.2) и весовую функцию (1.4). При этом под интегралом оказывается экспонента некоторой квадратичной формы. Перегруппировывая члены в этой квадратичной форме, можно заметить, что она по существу совпадает с интегралом действия гармонического осциллятора, только частота этого осциллятора и сила, действующая на него, являются комплексными величинами:

$$A_{\{a\}}(x', x) = e^{-\frac{\langle a^2 \rangle}{\Delta a^2}} \int d\{x\} e^{\frac{i}{\hbar} \tilde{S}\{x\}},$$

где

$$\tilde{S}\{x\} = \int_0^t dt \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \tilde{\omega}^2 x^2 + \tilde{F}x \right], \quad (1.5)$$

$$\tilde{\omega}^2 = \omega^2 - i\nu^2; \quad \tilde{F}(t) = F(t) - im\nu^2 a(t).$$

Мнимые части частоты и силы выражаются через некоторую характерную частоту  $\nu$ , которая зависит от точности измерений  $\Delta a$  и равна

$$\nu^2 = \frac{2\hbar}{m\tau\Delta a^2}. \quad (1.6)$$

Интеграл по путям для гармонического осциллятора был найден в § 4 гл. 2. Найденное там выражение (формула (4.9) главы 2) аналитически зависит от параметров осциллятора и действующей на него силы. Поэтому оно остается справедливым и при комплексных значениях этих параметров и при комплексной силе. Это позволяет сразу написать выражение для амплитуды:

$$A_{\{a\}}(x', x) = \left( \frac{m\tilde{\omega}}{2\pi i \hbar \sin \tilde{\omega}\tau} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{\langle a^2 \rangle}{\Delta a^2} + \frac{i}{\hbar} \tilde{S}\{\xi\} \right]. \quad (1.7)$$

Оно содержит действие комплексного осциллятора на «классической» траектории такого осциллятора:

$$m\ddot{\xi} + m\tilde{\omega}^2 \xi = \tilde{F}, \quad \xi(0) = x, \quad \xi(\tau) = x'. \quad (1.8)$$

Для дальнейшего анализа нам потребуется лишь вероятность, т. е. квадрат модуля найденной амплитуды. Кроме того, численный множитель в выражении для вероятности будет несущественным. Следовательно, необходимо найти действительную часть экспоненты. Анализ показывает, что она равна  $-\langle |\xi - a|^2 \rangle / \Delta a^2$ . Следовательно, вероятность равна

$$P_{\{a\}}(x', x) = |A_{\{a\}}(x', x)|^2 = J^2 e^{-\frac{2}{\Delta a^2} \langle |\xi - a|^2 \rangle}. \quad (1.9)$$

Эта величина есть вероятность того, что измерение пути даст результат  $\{a\}$ , если до и после измерения пути осциллятор имел определенные положения, соответственно  $x$  и  $x'$ . В следующем параграфе мы проанализируем полученное распределение вероятностей.

## § 2. Отклонения от классической картины при измерении пути

В предыдущем параграфе была рассмотрена операция измерения пути (слежение за координатой) осциллятора в предположении, что до измерения и после него осциллятор имел определенные положения  $x, x'$ . Впоследствии мы рассмотрим более общую ситуацию, заключающуюся в том, что до и после измерения осциллятор находится в произвольных квантовых состояниях. Сейчас же проанализируем распределение вероятностей, полученное в предположении, что  $x, x'$  известны.

Полученное распределение вероятностей (1.9) выражается через комплекснозначную функцию  $\lambda(t) = \xi(t) - a(t)$ , где  $\{a\}$  — результат измерения пути, а  $\xi$  — функция, удовлетворяющая условиям (1.8). Отсюда следует, что функция  $\lambda$  является решением задачи

$$m\ddot{\lambda} + m\tilde{\omega}^2\lambda = \delta F, \quad \lambda(0) = \delta x, \quad \lambda(\tau) = \delta x', \quad (2.1)$$

где обозначено

$$\delta F = F - F_{\{a\}}, \quad \delta x = x - a(0), \quad \delta x' = x' - a(\tau)$$

и

$$F_{\{a\}} = m\ddot{a}(t) + m\omega^2 a(t).$$

Через  $\tilde{\omega}$  здесь обозначена комплексная частота, определяемая формулой

$$\tilde{\omega}^2 = \omega^2 - i\nu^2, \quad \nu^2 = \frac{2\hbar}{m\tau\Delta a^2}$$

и зависящая от точности измерения пути  $\Delta a$ .

Зная граничные условия для осциллятора  $x, x'$ , точность, с которой измеряется путь,  $\Delta a$ , и результат измерения пути,  $\{a\}$ , мы можем решить уравнение (2.1) и найти функцию  $\lambda(t)$ . Тогда вероятность данного результата измерения равна

$$P_{\{a\}}(x', x) = J^2 e^{-\frac{2\|\lambda\|^2}{\Delta a^2}}, \quad (2.2)$$

т. е. непосредственно выражается через величину

$$\|\lambda\|^2 = \langle \lambda^2 \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \lambda^2(t).$$

Поясним новое введенное здесь обозначение  $\|\lambda\|$ . Комплекснозначные функции, для которых интеграл  $\|\lambda\|^2$  конечен, образуют бесконечномерное линейное пространство (над полем комплексных чисел), называемое *гильбертовым пространством* (см., например, [23, 24]). Каждая функция  $\lambda$ , удовлетворяющая этому условию, является вектором гильбертова пространства, а число  $\|\lambda\|$  называется нормой вектора и играет ту же роль, что абсолютная величина или длина вектора для обычных конечномерных векторов.

Таким образом, вероятность  $P_{\{a\}}(x', x)$  зависит в конечном счете от нормы  $\|\lambda\|$  функции  $\lambda$ , а эту функцию можно найти, решив задачу (2.1). Математически, следовательно, анализ распределения вероятности (2.2) сводится к анализу решений задачи (2.1). Ясно, что норма  $\|\lambda\|$  и, значит, вероятность определяются двумя числами  $\delta x$ ,  $\delta x'$  и функцией  $\delta F$ . При этом нулевым значениям величин  $\delta x$ ,  $\delta x'$ ,  $\delta F$  соответствует нулевая норма и, следовательно, максимальная вероятность, а с увеличением этих величин  $\|\lambda\|$ , вообще говоря, увеличивается, а вероятность  $P_{\{a\}}(x', x)$  уменьшается. Выясним физический смысл этого факта.

Мы видим, что наиболее вероятным результатом измерения пути является такой, который соответствует значениям  $\delta x = \delta x' = 0$  и  $\delta F = 0$ . При этом

$$m\ddot{a} + m\omega^2 a = F, \quad a(0) = x, \quad a(\tau) = x'.$$

Таким образом, наиболее вероятным результатом измерения пути является результат, полностью соответствующий классической картине: осциллятор движется по классической траектории с заданными граничными условиями. Если величины  $\delta x$ ,  $\delta x'$ ,  $\delta F$  отличаются от нуля, это значит, что результат измерения пути не соответствует классической картине. Такой результат менее вероятен, однако вероятность его все же не равна нулю. Это и есть специфический квантовый эффект, который мы должны исследовать.

Таким образом, величины  $\delta x$ ,  $\delta x'$ ,  $\delta F$  характеризуют отклонение результата измерения от того, который предсказывается классической теорией. По этой причине (и для удобства рассуждений) назовем эти величины соответственно *отклонениями положений* и *отклонением силы*. Функцию  $\lambda(t)$  назовем *функцией отклонения*, а ее норму  $\|\lambda\|$  — *нормой отклонения*. Отклонения положений и отклонение силы определяют функцию отклонения (уравнением и граничными условиями (2.1)), а норма отклонения непосредственно определяет вероятность результата (по формуле (2.2)). Наиболее вероятен результат, соответствующий нулевым отклонениям. Чем больше отклонения, тем, вообще говоря, меньше вероятность соответствующего результата. Теперь нашей задачей является охарактеризовать эту зависимость количественно.

Из формулы (2.2) видно, что вероятность соответствующего результата остается близкой к максимальной, если норма отклонения  $\|\lambda\|^2 \ll \Delta a^2$ . Вероятность начинает существенно убывать, когда норма становится порядка  $\|\lambda\|^2 \sim \frac{1}{2} \Delta a^2$ , и практически равна нулю вероятность таких результатов, для которых норма отклонения  $\|\lambda\|^2 \gg \Delta a^2$ . Можно считать, следовательно, что измерение пути может дать любой результат, удовлетворяющий условию

$$\|\lambda\|^2 \leq \frac{1}{2} \Delta a^2, \quad (2.3)$$



причем вероятность любого из этих результатов примерно одна и та же. Те же результаты, которые не удовлетворяют условию (2.3), маловероятны. Остается, следовательно, выяснить, при каких отклонениях  $\delta x$ ,  $\delta x'$ ,  $\delta F$  выполняется еще неравенство (2.3), т. е. какие отклонения могут практически встречаться в качестве результатов измерения.

Мы проведем этот анализ в два этапа. Сначала будем предполагать, что отклонения положений  $\delta x$ ,  $\delta x'$  равны нулю, и выясним, насколько большими могут быть отклонения силы  $\delta F$ . При этом будут получены физически самые важные выводы. Затем мы проанализируем роль отклонений  $\delta x$ ,  $\delta x'$  и при этом несколько уточним сделанные физические выводы.

### § 3. Оценка силы, действующей на осциллятор

Вероятности различных результатов измерения пути были найдены в предыдущем параграфе. Вероятность получить результат  $\{a\}$  зависит от параметров, которые мы называли отклонениями положений  $\delta x$ ,  $\delta x'$  и отклонением силы  $\delta F = F - m(\ddot{a} + \omega^2 a)$ . В этом параграфе мы проанализируем зависимость вероятности от отклонения силы, полагая  $\delta x = \delta x' = 0$ . Впоследствии будет показано, что отклонения положений существенно влияют лишь на частотные составляющие, близкие к резонансу. Поэтому результаты этого параграфа дают правильную картину вдали от резонанса. Поведение резонансных частотных составляющих будет проанализировано позже отдельно.

В предыдущем параграфе мы видели, что вероятность получить результат  $\{a\}$  максимальна, если  $\delta F = 0$ , т. е. путь  $\{a\}$  соответствует движению классического осциллятора. Пути, отклоняющиеся от классического, также появляются с ненулевыми вероятностями. При этом вероятность результата  $\{a\}$  близка к максимальной, если норма отклонения удовлетворяет неравенству

$$\|\lambda\|^2 \leq \frac{1}{2} \Delta a^2. \quad (3.1)$$

Функция отклонения  $\lambda(t)$  при сделанных в этом параграфе предположениях определяется уравнением

$$m\ddot{\lambda} + m\omega^2\lambda = \delta F, \quad \lambda(0) = \dot{\lambda}(\tau) = 0, \quad (3.2)$$

где  $\bar{\omega}^2 = \omega^2 - i\nu^2$ ,  $\nu^2 = 2\hbar/m\tau\Delta a^2$ .

Рассмотрим вопрос об измерении в следующем аспекте, характерном для практических приложений. Предположим, что сила  $F$ , действующая на осциллятор, неизвестна, и измерение пути производится таким образом, чтобы найти эту силу. Пусть измерение пути дало результат  $\{a\}$ . Что при этом можно сказать о силе, действующей на осциллятор? Точнее, требуется 1) оценить действующую на осциллятор силу и 2) найти возможную погрешность этой оценки, т. е. выяснить, в какой мере этой оценке можно доверять.

Из сказанного уже ясен ответ на первый вопрос. Поскольку наиболее вероятным результатом измерения пути является классический путь, то наилучшей оценкой действующей силы также является сила, найденная по классической формуле. Другими словами, если измерение пути дает результат  $\{a\}$ , то наилучшей оценкой для действующей на осциллятор силы является функция

$$F_{\{a\}} = m(\ddot{a} + \omega^2 a).$$

Этот результат, формально следующий из найденного распределения вероятностей, является почти тривиальным. Более интересным является другой вопрос: каково может быть отклонение истинной силы, действовавшей на осциллятор, от этой ее оценки.

Ответ на этот вопрос также содержится фактически в неравенстве (3.1) и уравнении (3.2). Отклонение  $\delta F$  истинной силы от ее наилучшей (классической) оценки может быть только таким, чтобы выполнялось неравенство (3.1). Следовательно, в принципе задача уже решена. Пусть измерение пути дало результат  $\{a\}$ . Тогда наилучшей оценкой действующей силы является  $F_{\{a\}}$ . Тем не менее истинная сила может отличаться от этой оценки. Возьмем произвольную функцию  $F(t)$  и зададим вопрос: может ли истинная сила описываться этой функцией. Ответ такой. Следует найти разность  $\delta F = F - F_{\{a\}}$ , подставить его в правую часть уравнения (3.2) и решить уравнение. Если найденная функция  $\lambda$  удовлетворяет неравенству (3.1), то истинная сила может описываться функцией  $F$ . Если неравенство не выполняется, то это невозможно.

Этот общий ответ, однако, не дает ясного представления о возможных масштабах отклонения силы. Чтобы получить это представление, рассмотрим простые частные случаи. Зададим вопрос: может ли истинная сила отличаться от ее оценки на некоторой фиксированной частоте, и если может, то насколько. Другими словами, предположим, что отклонение силы  $\delta F(t)$  есть гармоническая функция. Какова максимальная амплитуда этой функции, при которой неравенство (3.1) еще выполняется. Для простоты предположим пока, что частота, которая нас интересует, есть  $\Omega_n = n\pi/\tau$ . Фазу гармонической функции также выберем специальным образом, предполагая, что

$$\delta F(t) = \delta F_{\Omega_n} \sin \Omega_n t.$$

Спрашивается, если отклонение силы имеет такую частоту и фазу, то какова максимальная амплитуда его  $\delta F_{\Omega_n}$ .

Подставляя функцию  $\delta F$  такой специальной формы в правую часть уравнения (3.2), мы очень легко его решим и получим функцию отклонения в виде

$$\lambda(t) = \frac{\delta F_{\Omega_n}}{m(\bar{\omega}^2 - \Omega_n^2)} \sin \Omega_n t.$$



Норма отклонения в этом случае также легко вычисляется и оказывается равной

$$\|\lambda\|^2 = \frac{\delta F_{\Omega_n}^2}{2m^2 |\bar{\omega}^2 - \Omega_n^2|^2} = \frac{\delta F_{\Omega_n}^2}{2m^2 [(\Omega_n^2 - \omega^2)^2 + \nu^4]}.$$

Наконец, подставляя это выражение в неравенство (3.1) и вспоминая, что  $\nu^2 = 2\hbar/m\tau\Delta a^2$ , получим окончательно

$$\delta F_{\Omega}^2 \leq m^2 (\Omega^2 - \omega^2)^2 \left( \Delta a^2 + \frac{\Delta a_{\Omega}^4}{\Delta a^2} \right), \quad (3.3)$$

где использовано обозначение

$$\Delta a_{\Omega}^2 = \frac{2\hbar}{m\tau |\Omega^2 - \omega^2|}.$$

В последних двух формулах мы сознательно опустили индекс  $n$  у частоты  $\Omega_n$ . Дело в том, что хотя простой вывод неравенства (3.3), приведенный выше, справедлив лишь при  $\Omega = \Omega_n$  и для специально подобранной фазы функции  $\delta F$ , однако на самом деле это неравенство можно доказать для любой частоты  $\Omega$  и для отклонения силы вида

$$\delta F(t) = \delta F_{\Omega} \sin(\Omega t + \varphi). \quad (3.4)$$

Исключение составляют лишь частоты, лежащие в полосе порядка  $\pi/\tau$  вокруг резонансной частоты  $\omega$ . В этой полосе требуется учитывать еще и отклонения положений  $\delta x, \delta x'$ . А для частотных составляющих, удаленных от резонансной более чем на  $\pi/\tau$ , можно положить  $\delta x = \delta x' = 0$ , и справедливо неравенство (3.3). Правда, доказательство этого факта является довольно громоздким, и мы не будем его здесь приводить. Проанализируем теперь физический смысл этого неравенства.

Неравенство (3.3) означает, что истинная сила по сравнению с ее оценкой может содержать еще дополнительную составляющую частоты  $\Omega$ , однако амплитуда этой составляющей не может быть сколь угодно большой. Другими словами, неравенство (3.3) показывает, насколько можно доверять оценке  $F_{\{a\}}$  на частоте  $\Omega$ . Например, предположим, что измерение пути дало результат  $a \equiv 0$ . Это значит, что на осциллятор скорее всего не действовало никакой силы ( $F_{\{a\}} \equiv 0$ ). Однако возможно, что на него действовала сила частоты  $\Omega$ . В этом случае амплитуда такой силы заведомо ограничена неравенством (3.3). Если амплитуда силы ограничена этим неравенством, то измерение пути не позволяет такую силу обнаружить. Но силы, имеющие большие амплитуды, могут быть обнаружены при помощи измерения пути. Таким образом, неравенство (3.3) позволяет также решать вопрос о минимальных обнаружимых силах.

Согласно (3.3), максимальная возможная ошибка оценивания силы на частоте  $\Omega$  зависит не только от параметров осциллятора и частоты  $\Omega$ , но и от точности  $\Delta a$ , с которой измеряется путь. При этом существенно, как соотносится эта точность с характерным квантовым порогом  $\Delta a_{\Omega}$ . Существенно отличаются



случаи  $\Delta a \gg \Delta a_{\text{к}}$  (классический режим измерения),  $\Delta a \ll \Delta a_{\text{к}}$  (квантовый режим измерения) и  $\Delta a \simeq \Delta a_{\text{к}}$  (пограничный между классическим и квантовым и, как будет видно, оптимальный режим измерения).

Если осуществляется классический режим измерения,  $\Delta a \gg \Delta a_{\text{к}}$ , то формула (3.3) упрощается следующим образом:

$$\delta F_{\text{к}} \leq m |\omega^2 - \Omega^2| \Delta a \quad \text{при} \quad \Delta a \gg \Delta a_{\text{к}}. \quad (3.5)$$

Нетрудно видеть, что это чисто классический результат. Действительно, если классический осциллятор испытывает действие гармонической силы (3.4), то его отклик является также гармонической функцией с той же частотой и с амплитудой  $a_{\text{к}} = F_{\text{к}} / (m |\omega^2 - \Omega^2|)$ . Поэтому если путь классического осциллятора измеряется с точностью  $\Delta a$ , то ошибка в оценке амплитуды  $F_{\text{к}}$  может достигать величины (3.5). Таким образом, для классического режима измерения квантовая формула (3.3) дает разумные результаты. Как и следовало ожидать, в этом режиме ошибка оценивания  $\delta F_{\text{к}}$  тем меньше, чем меньше погрешность измерения  $\Delta a$ .

Однако, уменьшая погрешность измерения  $\Delta a$ , экспериментатор рано или поздно снизит ее до уровня  $\Delta a_{\text{к}}$ , после чего наступит совершенно иной, квантовый режим измерения,  $\Delta a \ll \Delta a_{\text{к}}$ . Как видно из формулы (3.3), в этом режиме погрешность оценивания обратно пропорциональна погрешности измерения:

$$\delta F_{\text{к}} \leq m |\omega^2 - \Omega^2| \frac{\Delta a_{\text{к}}^2}{\Delta a} = \frac{2\hbar}{\tau \Delta a} \quad \text{при} \quad \Delta a \ll \Delta a_{\text{к}}. \quad (3.6)$$

Чем более точно производится измерение пути, тем менее точной становится оценка действующей на осциллятор силы. В этом проявляется принципиально неустранимое возмущение, которое измерительный процесс вносит в поведение квантовой системы. Количественно формула (3.6) согласуется с принципом неопределенности, так как показывает, что произведение неопределенности координаты  $\Delta a$  на неопределенность импульса в течение времени измерения,  $\delta F_{\text{к}} \tau$ , по порядку величины должна быть равна постоянной Планка.

Метод интегрирования по путям всегда приводит к оценке максимальной информации, которую можно извлечь из измерения. Никакой прибор не может оценить действующую силу с точностью, превышающей (3.6), хотя некоторые приборы, сконструированные не самым лучшим образом, даже этой точности не дают. Точно так же и принцип неопределенности Гайзенберга позволяет оценить максимальную доступную при измерении информацию. Поэтому формула (3.6), полученная интегрированием по путям, согласуется с принципом неопределенности. Отметим, однако, что получить формулу (3.6) непосредственно из принципа неопределенности трудно. Для таких сложных режимов измерения, как измерение пути, выводы, основанные непосредственно на принципе неопределенности, становятся ненадежными.

Итак, при уменьшении погрешности измерения пути  $\Delta a$  погрешность в оценивании силы  $\delta F_{\Omega}$  сначала уменьшается (3.5), а затем начинает возрастать (3.6). На границе этих двух режимов осуществляется оптимальный (для данной частоты) режим измерения:

$$\delta F_{\Omega} \leq \delta F_{\Omega}^{\text{opt}} = 2 \sqrt{\frac{m\hbar|\omega^2 - \Omega^2|}{\tau}} \quad \text{при } \Delta a \simeq \Delta a_{\Omega}. \quad (3.7)$$

Это уже абсолютный предел. Оценить действующую на данной частоте силу по измерению пути осциллятора невозможно с точностью, превышающей (3.7).

Формально из (3.7) следует, что при приближении к резонансу  $\Omega \rightarrow \omega$  точность оценивания действующей силы становится сколь угодно большой. Но именно в этом случае формула (3.3) становится непригодной. Она справедлива лишь пока  $|\Omega - \omega| \geq \pi/\tau$ . Если мы дойдем до границы допустимой области и положим  $|\Omega - \omega| \simeq \pi/\tau$ , то по формуле (3.7) получим для оценки резонансной составляющей силы следующую точность:

$$\delta F_{\text{res}}^{\text{opt}} \approx 2 \sqrt{2\pi} \frac{\sqrt{\hbar m \omega}}{\tau}. \quad (3.8)$$

Хотя это рассуждение само по себе ничего не доказывает, оно позволяет ожидать, что большей точности достичь нельзя. Это действительно оказывается верно: при дальнейшем приближении к резонансу точность оценки действующей силы перестает возрастать. Однако доказательство этого факта, довольно громоздкое, мы опускаем.

Следует отметить, что условие оптимальности  $\Delta a = \Delta a_{\Omega}$  зависит не только от точности  $\Delta a$ , с которой измеряется путь, но

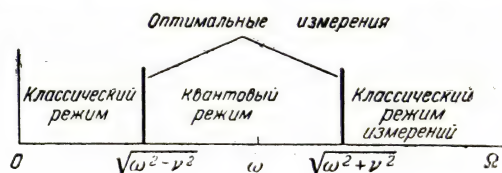


Рис. 6.

и от частоты  $\Omega$ . Предположим, что нас интересует только одна частота  $\Omega$  (например, воздействие на осциллятор может происходить только на этой частоте, и необходимо лишь зарегистрировать это воздействие). Тогда (при

фиксированных параметрах осциллятора  $m, \omega$ ) следует производить измерение пути с точностью  $\Delta a = \Delta a_{\Omega}$ , чтобы именно на интересующей нас частоте измерение было оптимальным. Если же воздействие в принципе может происходить на разных частотах, то, измеряя путь с точностью  $\Delta a$ , мы получим для одних частот классический режим измерения ( $\Delta a \gg \Delta a_{\Omega}$ ), для других — квантовый ( $\Delta a \ll \Delta a_{\Omega}$ ) и лишь для двух частот  $\Omega = \sqrt{\omega^2 \pm \nu^2}$  — оптимальный ( $\Delta a = \Delta a_{\Omega}$ ). В этом смысле выгоднее оказываются спектральные измерения, которые будут рассматриваться в следующей главе. Спектральные измерения можно производить независимо на разных частотах, подобрав на каждой из частот оптимальную точность измерения (рис. 6).



Мы подробно рассмотрели случай, когда отклонение силы  $\delta F(t)$  — гармоническая функция. Мы знаем теперь, что если истинная сила  $F$  отличается от своей оценки  $F_{\{a\}}$  на гармоническую функцию, то амплитуда этой гармонической функции не может превышать определенной величины. Однако нерешенным остается вопрос о том, какие ограничения на отклонение силы  $\delta F$  имеются в общем случае. Для того чтобы ответить на этот вопрос, разложим эту функцию в ряд Фурье

$$\delta F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta F_{\Omega_n} \sin \Omega_n t. \quad (3.9)$$

Подставляя такую функцию в правую часть уравнения (3.2) и разлагая решение в такой же ряд Фурье

$$\lambda(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sin \Omega_n t,$$

мы легко найдем коэффициенты этого разложения. Далее норму отклонения можно найти, воспользовавшись так называемой *формулой Парсевала*

$$\|\lambda\|^2 = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt |\lambda(t)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2. \quad (3.10)$$

Наконец, подставляя полученное выражение для нормы отклонения в неравенство (3.1), получим окончательно условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta F_{\Omega_n}^2}{(\Omega_n^2 - \omega^2)^2 + \nu^4} \leq m^2 \Delta a^2. \quad (3.11)$$

Неравенство (3.11) представляет собой единственное условие на коэффициенты Фурье отклонения силы (3.9), которое определяет допустимое отклонение в самом общем случае. Из него, однако, можно извлечь в качестве следствий другие, более слабые, но зато более наглядные условия. Действительно, каждый член ряда, стоящего в левой части (3.11), положителен. Следовательно, чтобы весь ряд был меньше выражения, стоящего в правой части, во всяком случае необходимо, чтобы каждый член ряда был меньше этого выражения. Записывая этот набор неравенств и подставляя выражение для  $\nu^2$ , мы получим для каждого коэффициента Фурье  $\delta F_{\Omega_n}$  неравенство (3.3). Следовательно, при произвольной форме отклонения силы, когда оно имеет много частотных составляющих (3.9), каждая частотная составляющая обязательно удовлетворяет неравенству (3.3), уже подробно проанализированному. Следовательно, все выводы, сделанные выше, остаются справедливыми и для нескольких частотных составляющих.

Однако неравенство (3.11) накладывает более сильные ограничения, чем совокупность неравенств (3.3) для отдельных час-



тотных составляющих. Действительно, каждый член ряда (3.11) может в принципе достигать величины  $m^2 \Delta a^2$ , однако если какой-то член действительно достигает этой величины, это значит, что остальные близки к нулю. Если же несколько членов ряда заметно отличны от нуля, то, поскольку лишь их сумма может достигать  $m^2 \Delta a^2$ , каждый из них должен быть гораздо меньше. Пусть, например, все коэффициенты  $\delta F_{\Omega_n}$  приблизительно равны друг другу для всех  $\Omega_n$ , лежащих в интервале частот  $\Delta \Omega$  вокруг частоты  $\Omega$ . Обозначим это общее значение через  $\delta F_{\Omega}$ . Тогда, поскольку в интервал  $\Delta \Omega$  попадает  $\tau \Delta \Omega / \pi$  дискретных частотных составляющих, из (3.11) получаем

$$\delta F_{\Omega}^2 \leq \frac{\pi}{\tau \Delta \Omega} m^2 (\Omega^2 - \omega^2)^2 \left( \Delta a^2 + \frac{\Delta a_{\Omega}^4}{\Delta a^2} \right).$$

Таким образом, при наличии в функции  $\delta F(t)$  нескольких частотных составляющих величина каждой из них подвергается более сильным ограничениям, чем если бы эта составляющая была единственной. Разумеется, это простое следствие того факта, что исходным является неравенство (3.1) для нормы функции  $\lambda(t)$ , а вклад в норму дают все частотные составляющие. Оценку, в которой учитываются сразу все частотные составляющие, можно сформулировать на основании (3.1), (3.2) следующим образом. Рассмотрим всевозможные комплекснозначные функции  $\lambda(t)$ , удовлетворяющие условиям  $\text{Im } \lambda(0) = \text{Im } \lambda(\tau) = 0$ ,  $\text{Im } (\ddot{\lambda} + \omega^2 \lambda) \equiv 0$ ,  $\|\lambda\|^2 \leq \frac{1}{2} \Delta a^2$ . Отклонение силы  $\delta F$  может определяться любой из этих функций  $\lambda(t)$  по формуле

$$\delta F = m \text{Re } (\ddot{\lambda} + \omega^2 \lambda).$$

Формулы, полученные в этом параграфе, являются основой для расчета процесса измерения пути осциллятора. В следующих параграфах мы проанализируем роль, которую играют при измерении граничные условия, т. е. состояния, в которых находится осциллятор до измерения пути и после него. Это прояснит картину в целом. Однако в итоге мы увидим, что формулы, выведенные в данном параграфе, в большинстве случаев применимы без всяких изменений.

#### § 4\*. Учет начального и конечного положений осциллятора

В предыдущем параграфе анализировался случай, когда отклонения положения  $\delta x = x - a(0)$ ,  $\delta x' = x' - a(\tau)$  можно считать нулевыми, т. е. когда результат измерения пути идеально согласован с положениями осциллятора до и после измерений. Возникает вопрос, в каком случае это предположение законно и что происходит при большом рассогласовании. Совершенно очевидно, что норма отклонения  $\|\lambda\|$  возрастает с ростом  $|\delta x|$ ,  $|\delta x'|$ , даже если отклонение силы  $\delta F = 0$ . Это значит, что вероятность

таких результатов измерения, которые не согласованы с положениями осциллятора до и после измерения, мала. Вопрос состоит лишь в том, какие отклонения  $\delta x$ ,  $\delta x'$  следует считать большими, т. е. когда путь следует считать рассогласованным с положениями.

Для решения этого вопроса рассмотрим уравнение для функции отклонения с нулевой правой частью, но ненулевыми граничными условиями:

$$\ddot{\lambda}_0 + \tilde{\omega}^2 \lambda_0 = 0, \quad \lambda_0(0) = \delta x, \quad \lambda_0(\tau) = \delta x'. \quad (4.1)$$

Это не что иное, как задача о собственных колебаниях осциллятора с комплексной частотой. Нам требуется найти зависимость нормы собственных колебаний  $\|\lambda_0\|$  от граничных значений.

Начнем с простых приближенных оценок, а потом приведем точные результаты. Общее решение уравнения (4.1) является суперпозицией двух независимых решений

$$\lambda_0^{(1)} = e^{i\tilde{\omega}t}, \quad \lambda_0^{(2)} = e^{-i\tilde{\omega}t},$$

где  $\tilde{\omega} = \omega_0 - i\Gamma$  — собственная частота комплексного осциллятора. Действительная и мнимая части ее равны

$$\omega_0 = \frac{1}{2}(\kappa^2 + \omega^2), \quad \Gamma = \sqrt{\frac{1}{2}(\kappa^2 - \omega^2)},$$

где обозначено  $\kappa^4 = \omega^4 + \nu^4$ . Нормы этих частных решений

$$\|\lambda_0^{(1)}\|^2 = \frac{1}{2\Gamma\tau}(e^{2\Gamma\tau} - 1), \quad \|\lambda_0^{(2)}\|^2 = \frac{1}{2\Gamma\tau}(1 - e^{-2\Gamma\tau}).$$

Пусть  $\max(|\delta x|, |\delta x'|) = \delta a$ . Анализируя граничные значения решений  $\lambda_0^{(1,2)}$ , нетрудно понять, что для удовлетворения граничных условий (4.1) необходимо взять суперпозицию этих решений с коэффициентом меньше или порядка  $e^{-\Gamma\tau}\delta a$  перед  $\lambda_0^{(1)}$  и коэффициентом меньше или порядка  $\delta a$  перед  $\lambda_0^{(2)}$ . При этом нормы отдельных членов суперпозиции не превосходят одной и той же величины  $(\delta a^2/2\Gamma\tau)(1 - e^{-2\Gamma\tau})$ . Поскольку хотя бы один из членов суперпозиции по норме должен достигать этой величины, для нормы всей суперпозиции имеем ту же оценку:

$$\|\lambda_0\|^2 \sim \frac{\delta a^2}{2\Gamma\tau}(1 - e^{-2\Gamma\tau}).$$

При  $\Gamma\tau \leq 1$  эта величина равна  $\delta a^2$ , а при  $\Gamma\tau \gg 1$  она имеет порядок  $\delta a^2/2\Gamma\tau$ .

Строгое рассмотрение позволяет дать для нормы  $\|\lambda_0\|$  следующую оценку сверху и снизу:

$$\varepsilon_- (\delta x^2 + \delta x'^2) \leq \|\lambda_0\|^2 \leq \varepsilon_+ (\delta x^2 + \delta x'^2), \quad (4.2)$$

где  $\varepsilon_{\pm}$  — корни квадратного уравнения

$$2(\operatorname{ch} 2\Gamma\tau - \cos 2\omega_0\tau)\varepsilon^2 - 4\left(\frac{\operatorname{sh} 2\Gamma\tau}{2\Gamma\tau} - \frac{\sin 2\omega_0\tau}{2\omega_0\tau}\right)\varepsilon + \left(\frac{\operatorname{sh} \Gamma\tau}{\Gamma\tau}\right)^2 - \left(\frac{\sin \omega_0\tau}{\omega_0\tau}\right)^2 = 0.$$

Из уравнения видно, что  $\varepsilon_{\pm}$  есть числа порядка единицы при  $\Gamma\tau \leq 1$  и порядка  $1/2\Gamma\tau$  при  $\Gamma\tau \gg 1$ , что согласуется с оценками, сделанными выше.

Скажем несколько слов о том, как выводится неравенство (4.2). Решение уравнения (4.1) линейно выражается через граничные условия  $\delta x$ ,  $\delta x'$ . Следовательно, норма этого решения выражается через граничные условия квадратично. Представим ее в виде

$$\|\lambda_0\|^2 = (\delta X, C\delta X),$$

где  $\delta X$  — вектор с компонентами  $\delta x$ ,  $\delta x'$ , а  $C$  — некоторая матрица, положительная в том смысле, что  $(f, Cf) \geq 0$  для любого вектора  $f$ . Если  $\varepsilon_{\pm}$  — такие числа, что выполняются неравенства

$$\varepsilon_- 1 \leq C \leq \varepsilon_+ 1$$

(матричное неравенство  $A \geq B$  означает, что матрица  $A - B$  положительна), то выполняется интересующее нас неравенство (4.2). С другой стороны, матрица  $C$  может быть найдена явно при помощи решения уравнения (4.1), а числа  $\varepsilon_{\pm}$  найдены при помощи критерия положительности матрицы [25].

Неравенства (4.2) позволяют судить о том, когда граничные условия безусловно несутельственны. Если

$$\delta x^2 + \delta x'^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon_+} \Delta a^2, \quad (4.3)$$

то выполняется

$$\|\lambda_0\|^2 \leq \frac{1}{2} \Delta a^2$$

и, значит, столь небольшое отклонение положений  $\delta x$ ,  $\delta x'$  не может привести к убыванию вероятности (2.2). Если отклонение положений больше, то оно, вообще говоря, уменьшает вероятность. Однако для полного решения вопроса следует совместно рассмотреть действие как отклонения положений, так и отклонения силы, т. е. и граничные условия, и правую часть уравнения для функции  $\lambda$  (t).

Пусть  $\lambda_0$  — «собственные колебания» комплексного осциллятора, т. е. решение уравнения с нулевой правой частью (4.1), а  $\lambda_1$  — «вынужденные колебания», т. е. решение того же уравнения с нулевыми граничными условиями (3.2). Тогда сумма  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_0$  является решением задачи (2.1), т. е. учитывает как отклонения положений, так и отклонение силы. В прошлом параграфе и в начале этого мы проанализировали нормы функций  $\lambda_1$  и  $\lambda_0$ , теперь нужно попытаться сделать некоторые выводы о норме их суммы,  $\|\lambda\| = \|\lambda_1 + \lambda_0\|$ . Мы не будем давать полный анализ этой задачи, так как он потребовал бы больших усилий и дал бы не так уж много результатов. Сделаем лишь несколько замечаний.

Ясно, что если норма собственных колебаний  $\|\lambda_0\|$  очень мала, то норма полной функции  $\|\lambda\|$  близка к норме вынужденных колебаний  $\|\lambda_1\|$ . Более строго это можно сформулировать следующим образом. В § 2 уже упоминалось, что функции  $\lambda$  можно рассматривать как векторы в бесконечномерном (так называемом гильбертовом) пространстве. Тогда норма вектора  $\|\lambda\|$  играет ту же роль, что длина обычного конечномерного вектора. Сумму



конечномерных векторов можно находить по правилу треугольника, а длины сторон треугольника удовлетворяют известному неравенству: длина каждой стороны меньше суммы длин двух других сторон. Поэтому для конечномерных векторов выполняется так называемое неравенство треугольника  $|a+b| \leq |a| + |b|$ . Аналогичное неравенство выполняется и для норм векторов в гильбертовом пространстве и также называется неравенством треугольника [24]. Применяя неравенство треугольника для интересующей нас суммы  $\lambda_1 + \lambda_0 = \lambda$ , а также для сумм  $\lambda + (-\lambda_1) = \lambda_0$  и  $\lambda + (-\lambda_0) = \lambda_1$ , получим

$$\|\lambda_1\| - \|\lambda_0\| \leq \|\lambda\| \leq \|\lambda_1\| + \|\lambda_0\|. \quad (4.4)$$

Что можно сказать на основании неравенства (4.4) об интересующей нас величине  $\|\lambda\|$ ? Прежде всего очевидно, что если  $\|\lambda_1\|^2 \leq \frac{1}{2} \Delta a^2$  и  $\|\lambda_0\|^2 \leq \frac{1}{2} \Delta a^2$ , то  $\|\lambda\|^2 \leq \frac{1}{2} \Delta a^2$ , т. е. соответствующий результат измерения возможен. Это почти очевидно. Если и отклонение силы, и отклонения положений достаточно малы, то путь  $\{a\}$  достаточно близок к классическому и поэтому может появиться в качестве результата измерения. Насколько должно быть для этого мало отклонение силы, было выяснено в § 3. Насколько должны быть малы отклонения положений, было выяснено в начале этого параграфа и выражается неравенством (4.3). Основной вывод, следующий из предыдущего рассуждения, состоит в том, что все выводы, сделанные в § 3, справедливы не только для  $\delta x = \delta x' = 0$ , но и для отклонений  $\delta x, \delta x'$ , удовлетворяющих неравенству (4.3).

Неравенство (4.4), однако не позволяет почти ничего сказать о случае, когда  $\|\lambda_0\|^2 \gg \frac{1}{2} \Delta a^2$ . Можно сделать лишь такой вывод: если при этом и возможно  $\|\lambda\|^2 \leq \frac{1}{2} \Delta a^2$ , то лишь при условии, что  $\|\lambda_1\| - \|\lambda_0\| \leq \frac{1}{2} \Delta a^2$ , т. е.  $\|\lambda_1\|^2 \gg \frac{1}{2} \Delta a^2$ . Мы встречаемся здесь с тем, что и собственные, и вынужденные колебания велики, но их сумма мала, т. е. они компенсируют друг друга. Однако это скорее исключение, чем правило, так как собственные и вынужденные колебания качественно отличаются друг от друга.

Собственные и вынужденные колебания могут компенсировать друг друга (почти полностью) в том случае, если вынуждающая сила действует на частоте, близкой к резонансной. Мы не будем приводить здесь разбор этого случая. Скажем лишь, что именно это является причиной того, что основная оценка (3.3) становится несправедливой в полосе частот шириной  $\pi/\tau$  вблизи резонансной частоты  $\omega$ .

До сих пор мы говорили о том, при каких условиях  $\|\lambda\|^2 \leq \frac{1}{2} \Delta a^2$ , так что вероятность соответствующего результата измерения велика. Из сказанного ясно, однако, при каких условиях оказывается  $\|\lambda\|^2 \gg \frac{1}{2} \Delta a^2$ , и вероятность становится малой.

Это происходит в том случае, если либо  $\|\lambda_1\|$ , либо  $\|\lambda_0\|$ , либо обе эти величины велики. В § 3 были рассмотрены условия, приводящие к тому, что  $\|\lambda_1\|$  становится большим. Это происходит, когда отклонение силы  $\delta F$  становится большим. Такие большие отклонения силы маловероятны, т. е. практически не встречаются при измерениях. В начале этого параграфа были найдены условия того, что  $\|\lambda_0\|$  становится большим. Для этого необходимо, чтобы отклонения положений были достаточно велики. Более конкретно, это происходит, если

$$\delta x^2 + \delta x'^2 \geq \frac{1}{2\varepsilon_-} \Delta a^2. \quad (4.5)$$

Мы должны, следовательно, сделать вывод, что такие большие отклонения положений маловероятны и практически не встречаются при измерениях. В этом случае мы будем говорить, что путь  $\{a\}$  не согласован (или рассогласован) с положениями осциллятора до и после измерения пути. Как видим, рассогласование означает не просто, что  $\delta x$ ,  $\delta x'$  отличны от нуля, а более сильное условие (4.5). Результаты § 3 применимы почти всегда именно потому, что рассогласованные пути маловероятны.

### § 5\*. Произвольные начальное и конечное состояния осциллятора

До сих пор мы проводили вычисления в предположении, что положения осциллятора до и после измерения пути точно известны. Рассмотрим теперь общий случай. Именно, будем предполагать, что положения до и после измерения известны лишь с некоторой конечной точностью и не обязательно согласованы с результатом измерения пути. В результате такого рассмотрения полученные до сих пор результаты будут несколько уточнены и обоснованы. Например, мы выясним, с какой точностью должны быть известны  $x$ ,  $x'$ , чтобы были верны выводы предыдущих параграфов.

Будем предполагать, что в моменты  $t=0$ ,  $\tau$  известны квантовые состояния осциллятора  $\psi$ ,  $\psi'$ . В этом случае амплитуда вероятности и вероятность результата измерения пути  $\{a\}$  находится как интеграл от амплитуды  $A_{\{a\}}(x', x)$ , умноженной на волновые функции этих состояний (см. § 2 гл. 2):

$$A_{\psi'\{a\}\psi} = \int dx' \int dx \psi'(x') A_{\{a\}}(x', x) \psi(x),$$

$$P_{\psi'\{a\}\psi} = |A_{\psi'\{a\}\psi}|^2.$$

Для точного расчета этой амплитуды необходимо знать не только абсолютную величину амплитуды  $A_{\{a\}}(x', x)$ , но и ее фазу. Точно так же необходимо точно знать волновые функции  $\psi$ ,  $\psi'$ . Однако, чтобы не сужать область применимости результатов, мы сделаем лишь самые общие предположения относительно состоя-

ний  $\psi$ ,  $\psi'$ , и по этой причине фаза амплитуды  $A_{\{a\}}(x, x')$  нам также не понадобится.

Абсолютная величина амплитуды  $A_{\{a\}}(x', x)$  была найдена ранее (см. формулы (1.9), (2.2)):

$$|A_{\{a\}}(x', x)| = J e^{-\frac{1}{\Delta a^2} \|\lambda\|^2}.$$

Относительно функций  $\psi$ ,  $\psi'$  мы предположим лишь, что они почти полностью сосредоточены на интервалах  $\Delta x$ ,  $\Delta x'$  вблизи точек соответственно  $\bar{x}$ ,  $\bar{x}'$ . Такие функции описывают, например, состояние осциллятора после измерения его координаты с соответствующей точностью. Конкретный вид этих функций и характер их убывания для того анализа, который будет проведен, является несущественным. Можно, например, принять

$$|\psi(x)| = A e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{\Delta x^2}},$$

$$|\psi'(x')| = A' e^{-\frac{(x'-\bar{x}')^2}{\Delta x'^2}}.$$

Тогда амплитуда вероятности, интересующая нас, принимает вид

$$A_{\psi'\{a\}\psi} = J_1 \int dx' \int dx \times$$

$$\times \exp \left[ -\frac{\|\lambda\|^2}{\Delta a^2} - \frac{(x-\bar{x})^2}{\Delta x^2} - \frac{(x'-\bar{x}')^2}{\Delta x'^2} + i\Lambda(x', x) \right], \quad (5.1)$$

где  $\Lambda(x', x)$  — некоторая неизвестная нам функция, описывающая фазу подынтегрального выражения.

Конечно, полное исследование этой амплитуды можно провести лишь с учетом фазы  $\Lambda(x', x)$ . Однако некоторые выводы можно сделать без учета фазовых множителей. Действительно, амплитуда (5.1), а вместе с ней и вероятность  $P_{\psi'\{a\}\psi}$  заведомо малы, если подынтегральное выражение мало во всей области интегрирования (и быстро убывает на бесконечности). А это в свою очередь имеет место, если экспонента под интегралом мала. Выражаясь более точно, анализ может основываться на неравенстве

$$\sqrt{P_{\psi'\{a\}\psi}} = |A_{\psi'\{a\}\psi}| \leq$$

$$\leq J_1 \int dx' \int dx \exp \left[ -\frac{\|\lambda\|^2}{\Delta a^2} - \frac{(x-\bar{x})^2}{\Delta x^2} - \frac{(x'-\bar{x}')^2}{\Delta x'^2} \right].$$

На самом деле знак неравенства здесь можно даже заменить равенством по порядку величины:

$$P_{\psi'\{a\}\psi} \sim J_1^2 \left\{ \int dx' \int dx \exp \left[ -\frac{\|\lambda\|^2}{\Delta a^2} - \frac{(x-\bar{x})^2}{\Delta x^2} - \frac{(x'-\bar{x}')^2}{\Delta x'^2} \right] \right\}^2. \quad (5.2)$$

Это не означает, конечно, что при любых фазах волновых функций  $\psi$ ,  $\psi'$  значение интеграла (5.1) близко к его максимальному



значению, фигурирующему в формуле (5.2). Но это означает, что не меняя модулей этих волновых функций, как правило, можно подобрать их фазы таким образом, чтобы значение интеграла было близко к его максимальному значению. Поскольку вероятность в этом случае выше, на практике эти ситуации будут встречаться чаще. Когда мы принимаем равенство (5.2), это эквивалентно соглашению, что рассматриваются только такие чаще встречающиеся ситуации.

Исследуем теперь зависимость вероятности (5.2) от различных параметров. Легко понять, что максимума эта вероятность достигает при

$$F = F_{\{a\}} = m(\ddot{a} + \omega^2 a), \quad x = a(0), \quad x' = a(\tau), \quad (5.3)$$

т. е. в том случае, когда результат измерения соответствует классической картине. Оценим вероятность  $P_{\psi'_{\{a\}}\psi}$  в этом случае.

Только при таких «классических» условиях подынтегральное выражение в (5.2) может достигать своего максимального возможного значения — единицы. Это происходит при  $x = \bar{x}$ ,  $x' = \bar{x}'$ . Тогда оказывается  $\delta x = \delta x' = 0$ . Так как  $\delta F = 0$  с самого начала, то при этом норма отклонения обращается в нуль,  $\|\lambda\| = 0$ , и подынтегральное выражение становится равным единице. При отклонении переменных интегрирования  $x$ ,  $x'$  от значений  $\bar{x}$ ,  $\bar{x}'$  подынтегральное выражение убывает. Однако оно все еще остается близким к единице (по порядку величины), пока выполняются условия

$$(x - \bar{x})^2 \leq \frac{1}{2} \Delta x^2, \quad (x' - \bar{x}')^2 \leq \frac{1}{2} \Delta x'^2, \quad \|\lambda\|^2 \leq \frac{1}{2} \Delta a^2. \quad (5.4)$$

Норма отклонения  $\|\lambda\|$  в данном случае зависит лишь от  $\delta x = x - a(0)$ ,  $\delta x' = x' - a(\tau)$ , так как  $\delta F = 0$ . Из результатов предыдущего параграфа мы знаем, что она остается достаточно малой (выполняется третье из неравенств (5.4)), пока  $|\delta x|$ ,  $|\delta x'|$  не превысят определенного предела. Согласно (4.3), для этого достаточно

$$(x - a(0))^2 + (x' - a(\tau))^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon_+} \Delta a^2. \quad (5.5)$$

Обозначим

$$\bar{\Delta}x = \min\left(\frac{\Delta x}{\sqrt{2}}, \frac{\Delta a}{\sqrt{2\varepsilon_+}}\right);$$

$$\bar{\Delta}x' = \min\left(\frac{\Delta x'}{\sqrt{2}}, \frac{\Delta a}{\sqrt{2\varepsilon_+}}\right).$$

С учетом (5.5) неравенства (5.4) эквивалентны следующим:

$$|x - \bar{x}| \leq \bar{\Delta}x, \quad |x' - \bar{x}'| \leq \bar{\Delta}x'.$$

При изменении переменных интегрирования в пределах этого прямоугольника подынтегральное выражение остается близким к единице, а за его пределами быстро убывает. Поэтому величина

интеграла приблизительно равна площади прямоугольника. Это дает

$$P_{\psi\{a\}\psi} \sim J_1^2 \bar{\Delta} x^2 \bar{\Delta} x'^2. \quad (5.6)$$

Такое значение имеет вероятность результата измерения, при котором выполняются условия (5.3), т. е. соответствующего классической картине. Однако ясно, что вероятность остается близкой к своему максимальному значению и в том случае, если условия (5.3) не выполнены, однако отклонения от них достаточно малы. Какие отклонения допустимы? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим общую ситуацию, когда условия (5.3), вообще говоря, не выполняются.

Подынтегральное выражение в (5.2) существенно отлично от нуля лишь в области (5.4). Для того чтобы выполнялось  $\|\lambda\|^2 \leq \frac{1}{2} \Delta a^2$ , необходимо, чтобы отклонение силы было не слишком большим, т. е. согласно (3.11)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta F_{\omega_n}^2}{(\Omega_n^2 - \omega^2)^2 + \nu^4} \leq m^2 \Delta a^2, \quad (5.7)$$

и чтобы отклонения положений были достаточно малы (5.5). Кроме того, должны выполняться первые два неравенства из (5.4). Одновременное выполнение неравенства (5.5) и первых двух неравенств из (5.4) означает, что точка  $(x, x')$  на плоскости принадлежит пересечению двух областей, определяемых этими парами неравенств. Для этого такое пересечение должно быть непустым множеством, т. е. должно быть

$$\begin{aligned} |x - a(0)| &\leq \max\left(\frac{\Delta x}{\sqrt{2}}, \frac{\Delta a}{\sqrt{2\varepsilon_+}}\right), \\ |x' - a(\tau)| &\leq \max\left(\frac{\Delta x'}{\sqrt{2}}, \frac{\Delta a}{\sqrt{2\varepsilon_+}}\right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Выведенные неравенства (5.8) есть условия согласования пути  $\{a\}$  с той информацией о положении осциллятора, которая имеется до и после измерения пути. Если условие согласования не выполняется, то вероятность соответствующего результата измерения резко убывает. Рассогласованные пути маловероятны. Если  $\Delta x \leq \Delta a/\sqrt{\varepsilon_+}$  и  $\Delta x' \leq \Delta a/\sqrt{\varepsilon_+}$ , то условия согласования (5.8) переходят в условия (4.3), выведенные в предположении, что положения осциллятора до и после измерения известны точно. Теперь мы можем сказать, в каком случае положения можно считать известными точно: если неопределенности их меньше, чем  $\Delta a/\sqrt{\varepsilon_+}$ .

Если путь рассогласован, т. е. условие (5.8) нарушено, то вероятность мала. Такие пути практически не встречаются.

Если же это условие выполнено и, кроме того, выполняется (5.7), то подынтегральное выражение в (5.2) остается близким к единице в прямоугольнике размерами  $\Delta x \times \Delta x'$  и вероятность близка к своему максимальному значению (5.6).

Окончательный вывод состоит в том, что вероятными являются результаты измерения, удовлетворяющие условиям (5.7) и (5.8). Пути, не удовлетворяющие этим двум условиям, практически не встречаются. Если рассмотреть задачу об оценке силы, действующей на осциллятор, то можно не учитывать вообще рассогласованные пути, нарушающие условие (5.8). Все пути, которые будут встречаться в качестве результатов реальных измерений, являются согласованными. Если мы имеем некоторый такой результат измерения  $\{a\}$ , то мы знаем заведомо, что для него выполняется и условие (5.7) (иначе этот путь не мог бы возникнуть как результат измерений). Поэтому можно гарантировать, что истинная сила  $F$  отличается от ее наилучшей оценки  $F_{\{a\}} = m(\ddot{a} + \omega^2 a)$  не слишком сильно. Возможные отличия описываются неравенством (5.7). Это и является окончательным обоснованием тех выводов, которые были сделаны еще в § 3.

## § 6. Редукция состояния при измерении пути

Одной из самых сложных проблем в квантовой механике является проблема *редукции состояния* при измерении. Она сложна и с принципиальной точки зрения, потому что до сих пор не вполне понятна, и с чисто технической, потому что требует отказа от привычного уравнения Шредингера при описании временной эволюции. С этой точки зрения кажется чрезвычайно ценным то обстоятельство, что *метод интегрирования по путям «в конечных пределах» учитывает редукцию автоматически* и, пожалуй, делает ее более понятной. Рассмотрим это на примере измерения пути.

Будем представлять себе измерение пути как ряд последовательных измерений координаты, которые производятся с конечной точностью  $\Delta a$  через короткие промежутки времени  $\Delta t$  в течение интервала времени  $\tau = N \Delta t$ . Пусть система перед измерением (в момент  $t=0$ ) находится в состоянии  $\psi$ . Затем до первого измерения она развивается в соответствии с обычным уравнением Шредингера. Тогда к моменту времени  $t_1 = \Delta t$  система будет находиться в состоянии  $\psi_1$ , описываемом волновой функцией

$$\psi_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 K_{\Delta t}(x_1, x_0) \psi(x_0).$$

Здесь  $K_t(x, x')$  — функция, которая по аргументам  $t, x$  удовлетворяет уравнению Шредингера и которая, кроме того, удовлетворяет начальному условию  $K_0(x, x') = \delta(x - x')$ . Такая функция — не что иное, как амплитуда распространения, удовлетворяющая условию Эйнштейна — Смолуховского (уравнение (3.4)



гл. 2) и используемая для построения фейнмановского интеграла по путям. В частности, для свободной частицы такая функция имеет вид, определяемый формулой (3.3) гл. 2.

В момент  $t_1$  производится первое измерение координаты. Предположим, что оно дает результат  $a_1$ . Если измерение производится с точностью  $\Delta a$ , то это означает, что координата заведомо лежит в интервале  $[a_1 - \Delta a, a_1 + \Delta a]$ . После измерения координаты система будет находиться уже не в состоянии  $\psi_1$ , а в новом состоянии  $\psi'_1$ . Этот переход в новое состояние носит название редукции состояния или редукции волнового пакета. Он является следствием обратного влияния измерительного прибора на измеряемую систему.

Редукция состояния не может быть описана с помощью уравнения Шредингера или другого подобного ему динамического принципа. Причиной этого является классический характер измерительного прибора. Вместо динамического принципа редукция описывается в квантовой механике операцией типа проектирования [3, 61]. В интересующем нас случае, когда измеряется координата, измерение производится с конечной точностью и дает результат  $[a_1 - \Delta a, a_1 + \Delta a]$ , редукция состоит в том, что новая волновая функция совпадает со старой в этом интервале и равна нулю вне его:

$$\psi'_1(x) = \begin{cases} \psi_1(x) & \text{при } a_1 - \Delta a \leq x \leq a_1 + \Delta a, \\ 0 & \text{вне этого интервала.} \end{cases}$$

После того как произошло измерение координаты и система перешла в состояние  $\psi'_1$ , она в течение следующего интервала длительностью  $\Delta t$  развивается в соответствии с уравнением Шредингера и к моменту  $t_2 = 2\Delta t$  переходит в состояние

$$\begin{aligned} \psi_2(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 K_{\Delta t}(x_2, x_1) \psi'_1(x_1) = \\ &= \int_{a_1 - \Delta a}^{a_1 + \Delta a} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 K_{\Delta t}(x_2, x_1) K_{\Delta t}(x_1, x_0) \psi(x_0). \end{aligned}$$

В этот момент опять производится измерение координаты, которое дает результат  $[a_2 - \Delta a, a_2 + \Delta a]$ . В результате измерения произойдет редукция состояния и система перейдет из состояния  $\psi_2$  в состояние

$$\psi'_2(x) = \begin{cases} \psi_2(x) & \text{при } a_2 - \Delta a \leq x \leq a_2 + \Delta a, \\ 0 & \text{вне этого интервала.} \end{cases}$$

Далее опять последует эволюция, описываемая уравнением Шредингера, и т. д.

В результате этого к моменту  $t = \tau = N\Delta t$  произойдет  $N-1$  измерений координаты, которые дадут результаты  $a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$ ,

а система окажется в состоянии

$$\phi_N(x') = \int_{-\infty}^{\infty} dx A_{a_1, \dots, a_{N-1}}(x', x) \phi(x),$$

где обозначено

$$A_{a_1, \dots, a_{N-1}}(x', x) = \int_{a_1 - \Delta a}^{a_1 + \Delta a} dx_1 \dots \int_{a_{N-1} - \Delta a}^{a_{N-1} + \Delta a} dx_{N-1} K_{\Delta t}(x', x_{N-1}) \dots \\ \dots K_{\Delta t}(x_2, x_1) K_{\Delta t}(x_1, x)$$

Если мы теперь поставим вопрос: какова амплитуда вероятности того, что в момент  $t = \tau$  система окажется в состоянии  $\phi'$ , то ответом будет служить скалярное произведение  $(\phi', \phi_N)$ , т. е. амплитуда эта равна

$$A_{\phi' \{a_1, \dots, a_{N-1}\}} \phi = \int dx' \int dx \phi'(x') A_{a_1, \dots, a_{N-1}}(x', x) \phi(x).$$

Переходя к пределу  $N \rightarrow \infty$ , мы получим некоторый вариант непрерывного слежения за координатой или измерения пути, причем амплитуда перехода в этом случае будет равна

$$A_{\phi' \{a\}} \phi = \int dx' \int dx \phi'(x') A_{\{a\}}(x', x) \phi(x), \\ A_{\{a\}}(x', x) = \lim_{N \rightarrow \infty} A_{a_1, \dots, a_{N-1}}(x', x).$$

Если сравнить полученное выражение с выражением (2.4) гл. 2 и учесть при этом определение интеграла по путям (§ 3 гл. 2), то становится очевидным полное тождество. Таким образом, интегрирование по путям «в конечных пределах» действительно описывает процедуру непрерывного измерения с учетом происходящей при этом редукции состояния.

В данном случае мы рассматривали измерение пути как последовательность измерений координаты, производимых с конечной точностью и описываемых интервалом  $[a_i - \Delta a, a_i + \Delta a]$ . В результате получился интеграл по коридору путей, причем коридор задается условием  $|x(t) - a(t)| \leq \Delta a$ . Однако если мы попытаемся построить такую последовательность измерений, которая приводила бы к коридору путей в смысле среднего квадратичного,

$$\langle (x - a)^2 \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt (x(t) - a(t))^2 \leq \Delta a^2,$$

то это нам не удастся. Между тем интуитивно ясно, что многие реальные приборы должны реагировать именно на среднее квадратичное, не замечая даже больших, но кратковременных выбросов.

В этом сказывается гибкость метода интегрирования по путям и ограниченность представления о непрерывном измерении как о последовательности мгновенных измерений. Отнюдь не все из-



мерения можно адекватно представить такой последовательностью. Многие из них не являются «локальными во времени». Это относится, например, к случаям, когда прибор обладает инерционностью, а таково большинство приборов. Метод интегрирования по путям позволяет столь же легко описывать такие измерения, как и безынерционные, локальные во времени измерения. В частности, к такого типа *«интегральным» измерениям*, непредставимым последовательностью мгновенных измерений, относятся спектральные измерения, которые будут обсуждаться в следующей главе.

Это можно сформулировать несколько иначе, если подчеркнуть явление редукции состояния. Мы рассмотрели только что процесс, в котором происходит редукция состояния. При этом в данном конкретном случае редукция легко могла быть описана как с помощью интеграла по путям, так и с помощью обычных методов квантовой механики (проектирования). Однако в других случаях метод интегрирования по путям оказывается значительно более гибким. Так, например, в следующей главе мы без труда рассчитаем этим методом измерение отдельных частотных составляющих пути осциллятора, спектральные измерения. При таких измерениях также происходит редукция, и она автоматически учитывается в методе интегрирования по путям. Однако невозможно описать ее в рамках обычных методов квантовой механики. Таким образом, *интегрирование по путям «в конечных пределах» представляет собой по существу универсальный способ описания взаимодействующих друг с другом квантовой и классической систем*. Нам представляется, что в этом плане перспективы его применения гораздо шире, чем только теория измерений. Например, этот метод может оказаться эффективным в теории макроскопических квантовых эффектов.

## Глава 4

### СПЕКТРАЛЬНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

В гл. 2 был сформулирован подход к квантовой теории непрерывных измерений на основе интегрирования по путям «в конечных пределах». В гл. 3 этот подход был применен для анализа и расчета измерения пути осциллятора. В этой главе будет рассмотрен другой класс непрерывных измерений — спектральные измерения или измерения отдельных частотных составляющих траектории системы. Рассмотрение проводится на примере гармонического осциллятора и системы связанных гармонических осцилляторов.

На примере спектральных измерений возможности данного подхода к теории измерений и отличие его от других подходов делаются гораздо более очевидными, так как спектральные измерения относятся к классу интегральных измерений, которые принципиально невозможно свести к последовательности большого



числа мгновенных измерений. Это проявляется в том, что «семейство путей», по которому приходится интегрировать в данном случае, гораздо менее очевидно, чем коридор путей, использованный для описания измерения пути. Принципиально важно, что метод интегрирования по путям «в конечных пределах» позволяет без труда и без специальных усилий учесть редукцию состояния системы при такого рода интегральных измерениях. В рамках традиционной квантовой теории измерений постановка такой задачи кажется вообще невозможной.

## § 1. Спектральные измерения и спектральное представление интеграла по путям

Сформулированный в § 2 гл. 2 подход к описанию непрерывных измерений был до сих пор продемонстрирован лишь на примере измерения пути. Применение его в этом случае сводилось к определению коридора путей как семейства путей, адекватно отображающего результат измерения пути. Теперь мы рассмотрим другой класс непрерывных измерений — спектральные измерения. При этом главная задача состоит опять-таки в том, чтобы определить семейство путей, адекватно отображающее результат измерения. Остальное — дело математической техники.

Для конкретности опять будем рассматривать одномерную систему. Под спектральными измерениями будем понимать измерение отдельных частотных составляющих пути системы  $\{x\} = \{x(t) \mid 0 \leq t \leq \tau\}$ . Из-за конечности интервала времени естественно говорить о дискретном наборе частотных составляющих, которые получаются, если функцию  $x(t)$  разложить в ряд Фурье. (Впрочем, позднее мы проанализируем полученные результаты в терминах непрерывного набора частотных составляющих, получаемых разложением в интеграл Фурье).

Таким образом, в данном случае измеряется коэффициент Фурье функции  $\{x\}$ . Это подсказывает способ описания такого измерения. Нужно переписать интеграл по путям  $\{x\}$  как интеграл по коэффициентам Фурье этих путей и затем перейти к интегрированию в конечных пределах, соответствующих результату измерения.

Способ записи интеграла по путям как интеграла по коэффициентам Фурье (*спектральное представление интеграла по путям*) был рассмотрен в § 4 гл. 2 на примере гармонического осциллятора. Сейчас мы используем полученные там результаты для окончательной формулировки задачи.

Разложим путь  $\{x\}$  на интервале  $[0, \tau]$  в ряд Фурье

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sin \Omega_n t, \quad (1.1)$$

где обозначено  $\Omega_n = n\pi/\tau$ . Коэффициенты разложения  $x_n$  и есть те частотные составляющие, измерение которых мы будем рассматривать. Таким образом, мы предполагаем, что прибор изме-

ряет с некоторой конечной точностью один или несколько коэффициентов  $x_n$ . Прибор такого рода должен представлять собой разновидность спектрального анализатора. Если измеряемая система является макроскопической, то не возникает вопроса о реализуемости этого типа измерений: спектральные анализаторы применяются к таким системам сплошь и рядом. Вместе с тем при очень большой точности измерения даже в случае макроскопической системы начинают проявляться ее квантовые свойства. Роль этих квантовых свойств и способ их учета и предстоит нам рассмотреть.

Конкретное устройство прибора, измеряющего частотные составляющие  $x_n$ , не играет роли. Однако следует пояснить те общие предположения, которые делаются об этом приборе. В рассматриваемом подходе важно четко зафиксировать, *какую информацию о движении системы дает прибор*. Например, прибор, измеряющий путь, дает, конечно, какую-то информацию о составляющих  $x_n$ . Однако не так уж просто выяснить, какую именно. Действительно, если бы путь измерялся совершенно точно, то по результатам измерения пути можно было бы совершенно точно определить все составляющие  $x_n$ . Но при конечной точности измерения пути дело обстоит значительно сложнее. Наоборот, прибор, измеряющий, скажем, только одну частотную составляющую  $x_n$  (спектральный анализатор), довольно мало информации дает о пути  $\{x\}$  как функции времени.

В квантовой механике важно учесть, какую информацию дает прибор, потому что от этого зависит, как прибор воздействует на измеряемую систему, какие возмущения он вносит в ее движение. В целом можно сказать, что чем больше информации прибор дает о движении системы, тем больше он влияет на ее движение. Но важно не только количество, но и содержание информации. От того, какую информацию дает прибор, зависит, какое влияние он оказывает на систему. Влияние прибора на систему приводит к тому, что называется редукцией состояния системы. Редукция, как следует из сказанного, зависит от количества и содержания той информации, которую дает прибор. Именно поэтому проблема редукции оказывается такой сложной. И неоспоримое преимущество метода интегрирования по путям «в конечных пределах» (повторим это еще раз) состоит в том, что в нем описание информации, которую дает прибор, и описание редукции системы производится одновременно. Это просто одна операция «ограничения области интегрирования». Эту операцию можно интерпретировать как описание информации, получаемой при измерении. Но эта же операция автоматически учитывает влияние прибора на измеряемую систему, т. е. редукцию.

Мы будем в этой главе рассматривать измерения, при которых выясняется, чему равна одна или несколько частотных составляющих  $x_n$ . Измерение производится с конечной точностью, которая может быть различной для различных частотных составляющих. Если погрешность измерения составляющей  $x_n$  равна  $\Delta a_n$ , а результат измерения ее равен  $a_n$ , то это означает, что величина  $x_n$



лежит в интервале  $[a_n - \Delta a_n, a_n + \Delta a_n]$ . В частности, для некоторых  $n$  погрешность  $\Delta a_n$  может быть бесконечно большой. Это означает, что измерение не дает никакой информации о величине  $x_n$ , т. е. эта величина фактически не измеряется.

Отсюда ясно, как следует описывать измерение. Следует от интегрирования по путям  $\{x\}$  перейти к интегрированию по частотным составляющим путей  $x_n$  и ограничить интеграл по каждой составляющей соответствующим интервалом  $[a_n - \Delta a_n, a_n + \Delta a_n]$ . Если какие-то составляющие вообще не измеряются данным прибором, то интегрирование по ним производится в бесконечных пределах, как и в исходном интеграле по путям.

Остается записать конкретный интеграл. Как показано в § 4 гл. 2, для перехода к спектральному представлению интеграла по путям для осциллятора следует сначала интеграл по путям  $\{x\}$  с произвольными граничными условиями  $x, x'$  свести к интегралу по путям  $\{z\}$  с нулевыми граничными условиями:  $z(0) = z(\tau) = 0$ . Это делается при помощи разложения  $x(t) = \eta(t) + z(t)$ , где функция  $\eta$  удовлетворяет условию

$$\ddot{\eta} + \omega^2 \eta = 0, \quad \eta(0) = x, \quad \eta(\tau) = x'. \quad (1.2)$$

Тогда действие для осциллятора распадается в сумму  $S\{x\} = S\{\eta\} + S\{z\}$  и интеграл по путям  $\{x\}$  сводится к интегралу по путям  $\{z\}$ :

$$A(x', x) = \int_x d\{x\} e^{\frac{i}{\hbar} S\{x\}} = e^{\frac{i}{\hbar} S\{\eta\}} \int_0^0 d\{z\} e^{\frac{i}{\hbar} S\{z\}}.$$

Чтобы перейти к интегрированию по частотным составляющим, необходимо разложить в ряд Фурье функции  $\eta, z$  и функцию, описывающую силу, действующую на осциллятор:

$$\eta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \sin \Omega_n t, \quad z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \sin \Omega_n t, \quad (1.3)$$

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin \Omega_n t.$$

Тогда интеграл по путям (пока по всем путям) запишется в виде

$$A(x', x) = J e^{\frac{i}{\hbar} S\{\eta\}} \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} dz_2 \dots e^{\frac{i}{\hbar} S(z_1, z_2, \dots)}.$$

Здесь  $S\{x\}$  — интеграл действия для осциллятора, движущегося под действием внешней силы  $F(t)$ :

$$S\{x\} = \int_0^{\tau} dt \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + Fx \right], \quad (1.4)$$



а  $S(z_1, z_2, \dots)$  — функция, которая получается, если этот интеграл действия выразить через коэффициенты Фурье пути  $\{z\}$  и силы  $F$ :

$$S(z_1, z_2, \dots) = \frac{1}{2} \tau \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} m z_n^2 (\Omega_n^2 - \omega^2) + F_n z_n \right].$$

Записанный таким образом интеграл по всем путям определяет амплитуду перехода в случае, если во время перехода не производится никакого измерения (нет никакой информации о пути перехода). Если же в это время производится измерение частотных составляющих пути, причем частотная составляющая  $x_n$  измеряется с точностью  $\Delta a_n$  и результат ее измерения выражается числом  $a_n$ , то интегрирование следует вести в конечных пределах, причем интегрирование по переменной  $z_n$  — в пределах интервала

$$\Delta_n = [a_n - \eta_n - \Delta a_n, a_n - \eta_n + \Delta a_n].$$

Таким образом получаем (обозначая через  $\alpha$  результат измерения всех частотных составляющих)

$$A_\alpha(x', x) = J e^{\frac{i}{\hbar} S(\eta)} \int_{\Delta_1} dz_1 \int_{\Delta_2} dz_2 \dots e^{\frac{i}{\hbar} S(z_1, z_2, \dots)}.$$

Вместо интегрирования каждой переменной  $z_n$  по интервалу  $\Delta_n$  можно интегрировать ее в бесконечных пределах, но ввести весовую функцию, близкую к единице на интервале  $\Delta_n$  и быстро убывающую вне этого интервала. Удобно выбрать для этого гауссово распределение

$$\rho_n(z_n) = \exp \left[ - \frac{(z_n - a_n + \eta_n)^2}{\Delta a_n^2} \right],$$

которое к тому же и более реалистично описывает результат измерения частотной составляющей, чем интервал с резкими границами. После этого амплитуда, описывающая измерение частотных составляющих, принимает вид

$$A_\alpha(x', x) = J e^{\frac{i}{\hbar} S(\eta)} \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \rho_1(z_1) \int_{-\infty}^{\infty} dz_2 \rho_2(z_2) \dots e^{\frac{i}{\hbar} S(z_1, z_2, \dots)}. \quad (1.5)$$

На этом постановка задачи завершается и вопрос сводится уже к вычислению интеграла. Но вычисление в данном случае оказывается тривиальным. Действительно, кратный интеграл по  $z_1, z_2, \dots$  сводится к произведению интегралов, а интеграл по каждой из переменных  $z_n$  относится к гауссову типу и может быть вычислен по формуле (3.6) гл. 2. Это дает для амплитуды выражение в виде бесконечного произведения

$$A_\alpha(x', x) = e^{\frac{i}{\hbar} S(\eta)} \prod_{n=1}^{\infty} A_n(a_n - a_n^{cl}), \quad (1.6)$$

где введены обозначения

$$A_n(u) = J_n \exp \left\{ - \frac{u^2}{\Delta a_n^2 + \frac{(\Delta a_n^{\text{opt}})^4}{\Delta a_n^2}} \left[ 1 - i \left( \frac{\Delta a_n^{\text{opt}}}{\Delta a_n} \right)^2 \operatorname{sgn}(\Omega_n - \omega) \right] \right\},$$

$$a_n^{\text{cl}} = \frac{F_n}{m(\omega^2 - \Omega_n^2)} + \eta_n, \quad (a_n^{\text{opt}})^2 = \frac{4\hbar}{m\tau |\Omega_n^2 - \omega^2|}$$

(числовые множители  $J_n$  несущественны для дальнейшего).

Амплитуда  $A_\alpha(x', x)$  интерпретируется как амплитуда вероятности получения результата  $\alpha$ , если до и после измерения осциллятор находился соответственно в точках  $x, x'$ . Если эти положения точно известны, то квадрат модуля амплитуды дает вероятность результата  $\alpha$ . Если известны лишь волновые функции  $\psi, \psi'$ , то сначала следует найти амплитуду перехода между этими состояниями:

$$A_{\psi' \alpha \psi} = \int dx' \int dx \psi'(x') A_\alpha(x', x) \psi(x),$$

а уже затем перейти к вероятности, вычисляя квадрат модуля этой амплитуды. Получающиеся таким образом распределения вероятностей будут проанализированы в следующих параграфах.

## § 2. Спектральные измерения осциллятора и оценка действующей на него силы

В предыдущем параграфе с помощью спектрального представления интеграла по путям была найдена амплитуда вероятности того или иного результата спектральных измерений. Теперь мы проанализируем следствия, вытекающие из найденного вероятностного распределения. Начнем со случая, когда положения осциллятора  $x, x'$  до и после спектральных измерений известны (например, в моменты  $t=0, \tau$  производится измерение координаты с большой точностью). В этом случае вероятность того, что спектральные измерения дадут результат  $\alpha = (a_1, a_2, \dots)$ , равна просто квадрату модуля соответствующей амплитуды:

$$P_\alpha(x', x) = |A_\alpha(x', x)|^2 = \prod_{n=1}^{\infty} P_n(a_n), \quad (2.1)$$

где

$$P_n(a_n) = J_n^2 \exp \left\{ - \frac{i^2 (a_n - a_n^{\text{cl}})^2}{\Delta a_n^2 + \frac{(\Delta a_n^{\text{opt}})^4}{\Delta a_n^2}} \right\}. \quad (2.2)$$

Отсюда видно, прежде всего, что измерения различных частотных составляющих не зависят друг от друга (распределение вероятностей совместного измерения всех частотных составляющих факторизуется, сводится к произведению распределений вероятностей для измерения отдельных составляющих). Поэтому достаточно изучить распределение вероятностей  $P_n(a_n)$ , описы-

вающее измерение одной произвольно выбранной частотной составляющей. Для нее видно, что наиболее вероятным является результат  $a_n = a_n^{cl}$ , где

$$a_n^{cl} = \eta_n^1 + \frac{F_n}{m(\omega^2 - \Omega_n^2)}. \quad (2.3)$$

Нетрудно видеть, что это наиболее вероятное значение для составляющей  $x_n$  в точности соответствует движению классического осциллятора. Действительно, при граничных условиях  $x, x'$  под действием силы  $F(t)$  классический осциллятор двигался бы по траектории  $\xi = \eta + \zeta$ , где  $\eta$  — траектория свободного осциллятора с граничными условиями  $x, x'$  (собственные колебания), а  $\zeta$  — траектория осциллятора, движущегося под действием силы  $F$  при нулевых граничных условиях (вынужденные колебания). Разлагая все функции в ряды Фурье, нетрудно убедиться, что  $\xi_n = a_n^{cl}$ .

Таким образом, наиболее вероятно, что измерение частотной составляющей  $x_n$  даст классический результат  $a_n^{cl}$ . Однако распределение (2.2) показывает, что возможны и результаты, отклоняющиеся от классического. Вероятность близка к максимальной, если отклонение не слишком велико, а именно если

$$(a_n - a_n^{cl})^2 \leq \frac{1}{2} \left( \Delta a_n^2 + \frac{(\Delta a_n^{opt})^4}{\Delta a_n^2} \right). \quad (2.4)$$

Нетрудно видеть, что физические выводы, которые можно сделать из этого неравенства, существенно различаются в зависимости от того, какова погрешность измерения  $\Delta a_n$  по сравнению с характерным квантовым масштабом

$$(\Delta a_n^{opt})^2 = \frac{4\hbar}{m\tau |\Omega_n^2 - \omega^2|}. \quad (2.5)$$

При  $\Delta a_n \gg \Delta a_n^{opt}$  первый член в сумме (2.4) преобладает и разброс результатов измерения тем больше, чем больше погрешность измерения. В этом случае режим измерения составляющей  $x_n$  является чисто классическим. При  $\Delta a_n \ll \Delta a_n^{opt}$  преобладает второй член в сумме (2.4) и разброс результатов тем больше, чем меньше погрешность измерения. Наконец, на границе между классическим и квантовым, при  $\Delta a_n \simeq \Delta a_n^{opt}$ , режим измерения становится оптимальным. При этом разброс результатов измерения является минимальным и равен  $\Delta a_n^{opt}$ .

Рассмотрим задачу оценки силы, действующей на осциллятор, по результатам спектральных измерений. Предположим, что проведя измерение составляющей  $x_n$  с точностью  $\Delta a_n$ , мы получили результат  $a_n$ . Что можно сказать о силе, действующей на осциллятор? Мы знаем, что наиболее вероятным всегда является классический результат измерения. Поэтому наилучшую оценку для силы мы получим, если предположим, что  $n$ -я частотная составляющая силы равна

$$F_n^{(0)} = m(\omega^2 - \Omega_n^2)(a_n - \eta_n). \quad (2.6)$$



В этой формуле  $a_n$  — это результат измерения (который в данной постановке задачи предполагается известным), а  $\eta_n$  — это частотная составляющая собственных колебаний осциллятора с граничными условиями  $x, x'$ . Такую составляющую легко найти, решая классическую задачу. Она равна

$$\eta_n = \frac{2\Omega_n}{\tau(\Omega_n^2 - \omega^2)} (x - (-1)^n x'). \quad (2.7)$$

Таким образом, по результату измерения  $a_n$  составляющей  $x_n$  может быть оценена лишь  $n$ -я частотная составляющая силы. Наилучшая оценка находится по обычным классическим законам. Однако, зная, что результат измерения  $a_n$  может отличаться от наиболее вероятного классического результата  $a_n^{cl}$ , мы заключаем, что истинная действующая на осциллятор сила (точнее, ее частотная составляющая  $F_n$ ) может отличаться от оценки  $F_n^{(0)}$ . В соответствии с неравенством (2.4) это отличие ограничено следующим образом:

$$(F_n - F_n^{(0)})^2 \leq \frac{1}{2} m^2 (\Omega_n^2 - \omega^2)^2 \left( \Delta a_n^2 + \frac{(\Delta a_n^{opt})^4}{\Delta a_n^2} \right). \quad (2.8)$$

Это дает ответ на вопрос, какова точность оценки (2.6) для действующей на осциллятор силы.

Рассматривая по отдельности классический, квантовый и оптимальный (пограничный между классическим и квантовым) режимы измерения, получим в этих случаях для погрешности оценивания  $\delta F_n = F_n - F_n^{(0)}$  следующие формулы:

$$\begin{aligned} |\delta F_n| &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} m |\omega^2 - \Omega_n^2| \Delta a_n \quad \text{при} \quad \Delta a_n \gg \Delta a_n^{opt}, \\ |\delta F_n| &\leq 2 \sqrt{2} \frac{\hbar}{\tau \Delta a_n} \quad \text{при} \quad \Delta a_n \ll a_n^{opt}, \\ |\delta F_n| &\leq \delta F_n^{opt} = 2 \sqrt{\frac{\hbar m |\Omega_n^2 - \omega^2|}{\tau}} \quad \text{при} \quad \Delta a_n \simeq \Delta a_n^{opt}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Мы видим, что минимальная возможная погрешность оценки силы  $\delta F_n^{opt}$  уменьшается с ростом времени измерения  $\tau$ . Кроме того, она уменьшается, если частота интересующей нас составляющей  $\Omega_n$  приближается к резонансной частоте  $\omega$ . Однако это заключение сделано в предположении, что положения осциллятора до и после измерения  $x, x'$  известны совершенно точно. Впоследствии мы увидим, что это предположение является приемлемым лишь для частот, удаленных от резонансной не менее чем на  $\tau^{-1}$ . Предполагая, что частота  $\Omega_n$  находится на границе допустимой области, т. е.  $|\Omega_n - \omega| \sim \tau^{-1}$ , получим из (2.9)

$$\delta F_{res}^{opt} \approx 2 \sqrt{2} \frac{\sqrt{\hbar m \omega}}{\tau}. \quad (2.10)$$

Позднее мы увидим, что при обычных условиях эта оценка действительно справедлива, и в то же время увидим, как можно преодолеть это ограничение.

Мы подробно проанализировали измерение одной частотной составляющей  $x_n$ . Однако из-за факторизации распределения вероятностей (2.1) случай, когда измеряется сразу несколько составляющих, не вносит ничего нового. Следует отметить лишь одно любопытное обстоятельство. Когда мы рассматривали измерение пути гармонического осциллятора, то в частности при этом рассматривалась такая задача: как можно по результатам измерения пути оценить ту или иную частотную составляющую действующей на осциллятор силы. При этом была получена формула для точности оценки силы (формула (3.3) гл. 3), очень напоминающая формулу (2.8). Практически эти формулы совпадают, если принять, что погрешности измерения  $\Delta a$  и  $\Delta a_n$ , появляющиеся в этих формулах, совпадают. Однако чрезвычайно существенным является то обстоятельство, что измерение пути характеризуется лишь одной погрешностью  $\Delta a$ , а при спектральных измерениях каждая частотная составляющая может измеряться с любой точностью. Поэтому измерение пути с некоторой фиксированной погрешностью  $\Delta a$  оказывается оптимальным лишь для двух частот, лежащих по разные стороны от резонансной, для других же частот осуществляется либо классический режим (вдали от резонанса), либо квантовый (вблизи резонанса). В случае же спектральных измерений погрешности  $\Delta a_n$  можно подобрать так, чтобы режим измерения был оптимальным на всех частотах.

Таким образом, если измерения производятся для оценки силы лишь на одной частоте, то измерение пути и спектральное измерение одной частотной составляющей осциллятора эквивалентны в смысле квантовых ограничений на точность оценки. Если же требуется оценить несколько частотных составляющих в спектре действующей силы, то спектральные измерения оказываются более выгодными, чем измерение пути (разумеется, при условии оптимального выбора погрешности измерения на каждой частоте).

Приведем еще несколько формул, касающихся оценки силы. Предположим, что сила, действующая на осциллятор, может иметь лишь конечное число частотных составляющих  $F_n$ ,  $n \in \text{Sp}$ . Тогда для оценки этой силы следует измерить составляющие  $x_n$ ,  $n \in \text{Sp}$ . По результатам измерения  $a_n$  (и по известным положениям осциллятора до и после измерений  $x$ ,  $x'$ ) строится наилучшая оценка  $F_n^{(0)}$  каждой частотной составляющей силы из ее предполагаемого спектра,  $n \in \text{Sp}$ , а затем по ним восстанавливается наилучшая оценка для самой силы:

$$F^{(0)}(t) = \sum_{n \in \text{Sp}} F_n^{(0)} \sin \Omega_n t.$$

Погрешность этой оценки  $\delta F = F - F^{(0)}$ , как нетрудно видеть, разлагается в ряд Фурье с коэффициентами  $\delta F_n = F_n - F_n^{(0)}$ . По формуле Парсеваля (формула (3.10) гл. 3) имеем для средней



квадратичной погрешности

$$\langle (F - F^{(0)})^2 \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt (F(t) - F^{(0)}(t))^2 = \frac{1}{2} \sum_{n \in \text{Sp}} \delta F_n^2.$$

Теперь эту величину можно оценить при помощи неравенств (2.8) или (2.9). Например, если все составляющие измеряются в оптимальном режиме, то

$$\langle (F - F^{(0)})^2 \rangle \leq 2 \frac{\hbar m}{\tau} \sum_{n \in \text{Sp}} |\Omega_n^2 - \omega^2|.$$

Следует лишь помнить, что эта формула верна лишь до тех пор, пока ни одна из частот  $\Omega_n$ ,  $n \in \text{Sp}$ , не попадает в полосу частот шириной  $\tau^{-1}$  вблизи резонансной частоты  $\omega$ .

### § 3\*. Учет неопределенности координаты осциллятора до и после спектрального измерения

Мы подробно рассмотрели случай, когда координаты осциллятора до и после спектрального измерения  $x$ ,  $x'$  точно известны. Однако для квантовой системы такое положение является скорее исключением, чем правилом. Обычно координата известна лишь с некоторой конечной точностью. В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда начальное и конечное положения осциллятора известны с точностью соответственно  $\Delta x$  и  $\Delta x'$ . При этом мы выясним, при каких величинах этих неопределенностей можно считать, что положения известны точно, т. е. при каких условиях справедливы выводы, сделанные в предыдущем параграфе. Выяснится, что учет неопределенностей совершенно необходим при измерениях вблизи резонансной частоты, и для резонансных измерений будут сделаны соответствующие уточнения.

Если перед спектральным измерением осциллятор находится в состоянии  $\psi$ , а после него он обнаруживается в состоянии  $\psi'$ , то амплитуда перехода между этими состояниями определяется интегралом

$$A_{\psi' \alpha \psi} = \int dx' \int dx \psi'(x') A_{\alpha}(x', x) \psi(x).$$

Амплитуда  $A_{\alpha}(x', x)$  была найдена в § 1 полностью, вместе с ее фазой. Поэтому в принципе можно найти амплитуду  $A_{\psi' \alpha \psi}$  для любых состояний  $\psi$ ,  $\psi'$ . Мы, однако, ограничимся более поверхностным анализом, при котором фаза амплитуды  $A_{\alpha}(x', x)$  не существенна, а о состояниях  $\psi$ ,  $\psi'$  делаются лишь самые общие предположения. Точнее, предположим, что эти состояния сосредоточены почти полностью в интервалах шириной соответственно  $\Delta x$  и  $\Delta x'$  вокруг точек  $x$  и  $x'$ . Такие состояния возникают, например, при измерении координаты с соответствующей точностью. Поэтому результаты, которые будут получены, относятся, в част-



ности, к случаю, когда перед спектральными измерениями (в момент  $t=0$ ) производится измерение положения осциллятора с точностью  $\Delta x$ , а непосредственно после спектральных измерений (в момент  $t=\tau$ ) производится измерение положения с точностью  $\Delta x'$ .

Поскольку точный вид волновых функций будет для нашего анализа несущественным, предположим, что они имеют вид

$$|\psi(x)| = Ae^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{\Delta x^2}};$$

$$|\psi'(x')| = A'e^{-\frac{(x'-\bar{x}')^2}{\Delta x'^2}}.$$

Используя для модуля амплитуды  $A_\alpha(x', x)$  выражение (2.1), получим

$$A_{\psi'\alpha\psi} = J'' \int dx' \int dx \exp \left\{ - \sum_n \frac{(a - a_n^{cl})^2}{(\Delta a_n^{tot})^2} \right\} \times$$

$$\times \exp \left\{ - \frac{(x - \bar{x})^2}{\Delta x^2} - \frac{(x' - \bar{x}')^2}{\Delta x'^2} + i\Lambda(x', x) \right\}, \quad (3.1)$$

где обозначено

$$(\Delta a_n^{tot})^2 = \Delta a_n^2 + \frac{(\Delta a_n^{opt})^4}{\Delta a_n^2},$$

а  $\Lambda(x', x)$  — некоторая функция, определяющая фазу подынтегрального выражения. Нас интересует вероятность  $P_{\psi'\alpha\psi}$ , т. е. модуль амплитуды  $A_{\psi'\alpha\psi}$ . Модуль интеграла меньше или равен интегралу от модуля подынтегрального выражения. Таким образом мы можем получить для  $|A_{\psi'\alpha\psi}|$  неравенство, даже не зная фазы  $\Lambda(x', x)$ . Однако, более того, неравенство можно заменить знаком равенства по порядку величины, так, что

$$P_{\psi'\alpha\psi} \sim J^2 \left[ \int dx' \int dx \exp \left\{ - \sum_n \frac{(a_n - a_n^{cl})^2}{(\Delta a_n^{tot})^2} \right\} \times \right.$$

$$\left. \times \exp \left\{ - \frac{(x - \bar{x})^2}{\Delta x^2} - \frac{(x' - \bar{x}')^2}{\Delta x'^2} \right\} \right]^2. \quad (3.2)$$

Действительно, квадрат модуля интеграла (3.1) зависит от фаз волновых функций  $\psi, \psi'$  и при некотором выборе этих фаз достигает своего максимального значения (3.2). При других фазах интеграл может стать значительно меньше. Но это будет означать лишь, что такие фазы волновых функций в сочетании с данным результатом измерения  $\alpha$  маловероятны и встречаются сравнительно редко. Принимая равенство (3.2), мы просто принимаем соглашение, что рассматриваются только такие состояния  $\psi, \psi'$ , которые в реальном измерении встречаются достаточно часто.

Вероятность (3.2) достигает своего максимального значения при  $a_n = \bar{a}_n^{cl}$ , где  $\bar{a}_n^{cl}$  вычисляется по формулам (2.3), (2.7) при под-

становке  $x, x'$  вместо  $x, x'$ :

$$\bar{a}_n^{cl} = \frac{2\Omega_n}{\tau(\Omega_n^2 - \omega^2)} (x - (-1)^n x') + \frac{F_n}{m(\omega^2 - \Omega_n^2)}.$$

При этом подынтегральное выражение в (3.2) достигает своего максимального значения (единицы) в точке  $x=x, x'=x'$ , остается близким к единице в прямоугольнике

$$|x - \bar{x}| \leq \Delta x, \quad |x' - \bar{x}'| \leq \Delta x' \quad (3.3)$$

и быстро убывает вне его. Величина интеграла приблизительно равна площади прямоугольника  $4\Delta x\Delta x'$ .

На самом деле может оказаться, что подынтегральное выражение остается большим в области, гораздо меньшей, чем этот прямоугольник, и убывает за пределами этой узкой области. Это может происходить за счет изменения  $a_n^{cl}$  при изменении  $x, x'$ . Однако если на всей площади прямоугольника (3.3)  $a_n^{cl}$  отклоняется от  $\bar{a}_n^{cl}$  не более, чем на  $\Delta a_n^{tot}$ , то подынтегральное выражение начинает заметно убывать лишь за пределами прямоугольника. Это заведомо так, если выполнено неравенство

$$\Delta x + \Delta x' \leq \frac{\tau |\Omega_n^2 - \omega^2|}{2\Omega_n} \Delta a_n^{tot} \quad (3.4)$$

(заметим, что для частотных составляющих, которые не измеряются, величина  $\Delta a_n^{tot}$  равна бесконечности, так что для них это неравенство заведомо выполнено).

Неравенство (3.4) является условием того, что подынтегральное выражение становится много меньше своего максимума за счет отклонения  $a_n$  от значения  $\bar{a}_n^{cl}$ . При этом в пределах прямоугольника (3.3) можно считать, что  $a_n^{cl} = \bar{a}_n^{cl}$ . Можно сказать, следовательно, что при выполнении неравенства (3.4) все происходит точно так, как если бы положения осциллятора до и после измерения были известны точно и равны  $x, x'$ . Это условие того, что неопределенностями  $\Delta x, \Delta x'$  можно пренебречь при анализе спектрального измерения. В этом случае все выводы предыдущего параграфа остаются справедливыми.

Если же неравенство (3.4) не выполняется, то ситуация совершенно иная. В этом случае в пределах прямоугольника (3.3) величина  $a_n^{cl}$  может сильно отличаться от  $\bar{a}_n^{cl}$ . В то же время для того, чтобы подынтегральное выражение в (3.2) оставалось большим, требуется лишь, чтобы  $a_n$  оставалось близким к  $a_n^{cl}$ . Получается, что даже для значений  $a_n$ , сильно отличающихся от  $\bar{a}_n^{cl}$ , найдется такая область, где подынтегральное выражение близко к единице, и вероятность для таких значений  $a_n$  будет близка к максимальной (имеется в виду максимальная вероятность при данных  $\Delta x, \Delta x'$ ; вероятности при различных неопределенностях координат сравнивать не имеет смысла, потому что они относятся к разным экспериментам). Другими словами, если неравенство (3.4) не выполнено, то разброс результатов измерения  $a_n$  будет больше, чем при точно известных  $x, x'$ .



Смысл этого вывода довольно легко понять. Неравенство (3.4) может нарушаться, если неопределенности положений осциллятора  $\Delta x$ ,  $\Delta x'$  велики, а измеряемая частотная составляющая близка к резонансу. Но неопределенность положений означает неопределенность граничных условий для движения осциллятора. Если мы рассмотрим чисто классический осциллятор с неопределенными граничными условиями, то его собственные колебания будут до некоторой степени неопределенными. Между тем вблизи резонансной частоты собственные колебания трудно отличить от вынужденных. В результате неопределенность собственных колебаний будет восприниматься как шум, мешающий определить силу, действующую на осциллятор, точнее — ее резонансные составляющие.

Определим разброс величины  $a_n$  количественно. Когда  $x$ ,  $x'$  меняются в пределах прямоугольника (3.3), величина  $a_n^{cl}$  меняется в пределах

$$|a_n^{cl} - \bar{a}_n^{cl}| \leq \frac{2\Omega_n}{\tau |\Omega_n^2 - \omega^2|} (\Delta x + \Delta x').$$

Поскольку разность  $|a_n - a_n^{cl}|$  должна все время оставаться меньше, чем  $\Delta a_n^{tot}$  (иначе подынтегральное выражение в (3.2) мало), то  $a_n$  может меняться лишь в пределах

$$|a_n - \bar{a}_n^{cl}| \leq \Delta a_n^{tot} + \frac{2\Omega_n}{\tau |\Omega_n^2 - \omega^2|} (\Delta x + \Delta x'). \quad (3.5)$$

Формула (3.5) описывает разброс результатов измерения в самом общем случае. Когда выполняется неравенство (3.4), вторым членом в правой части этого неравенства можно пренебречь. Тогда мы получаем как частный случай все результаты предыдущего параграфа. Это та ситуация, когда координаты осциллятора до и после измерения можно считать точно известными.

#### § 4\*. Измерение частотных составляющих, близких к резонансу

В предыдущем параграфе было показано, что разброс результатов измерения частотной составляющей  $x_n$  в общем случае (когда координаты осциллятора до и после измерения известны с неопределенностями  $\Delta x$ ,  $\Delta x'$ ) описывается неравенством

$$|a_n - \bar{a}_n^{cl}| \leq \Delta a_n^{tot} + \frac{2\Omega_n}{\tau |\Omega_n^2 - \omega^2|} (\Delta x + \Delta x'), \quad (4.1)$$

где  $\bar{a}_n^{cl}$  — классическое значение этой составляющей, соответствующее средним значениям положений осциллятора  $\bar{x}$ ,  $\bar{x}'$ , а  $\Delta a_n^{tot}$  — погрешность измерения, содержащая как классическую, так и квантовую части:

$$(\Delta a_n^{tot})^2 = \Delta a_n^2 + \frac{(\Delta a_n^{pt})^4}{\Delta a_n^2}.$$

Смысл этой формулы нетрудно понять. По сравнению с разбросом, описываемым формулой (2.4), в ней учитывается еще разброс,



который вызывается неопределенностью положений  $x$ ,  $x'$  и как следствие — неопределенностью величины  $\eta_n$ .

Оценка силы в этом случае должна, разумеется, производиться в соответствии со средними значениями положений:

$$F_n^{(0)} = m(\omega^2 - \Omega_n^2)(a_n - \bar{\eta}_n),$$

где

$$\bar{\eta}_n = \frac{2\Omega_n}{\tau(\Omega_n^2 - \omega^2)}(x - (-1)^n x').$$

В силу большого разброса результатов измерения погрешность оценки силы также увеличивается:

$$|\delta F_n| \leq m|\Omega_n^2 - \omega^2| \Delta a_n^{\text{tot}} + \frac{2m\Omega_n}{\tau}(\Delta x + \Delta x'). \quad (4.2)$$

В частности, при оптимальном режиме измерения,  $\Delta a_n = \Delta a_n^{\text{opt}}$ ,

$$|\delta F_n| \leq \delta F_n^{\text{opt}} = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{\hbar m |\Omega_n^2 - \omega^2|}{\tau}} + \frac{2m\Omega_n}{\tau}(\Delta x + \Delta x'). \quad (4.3)$$

Из формулы (4.2) очевидны границы применимости результатов § 2. Основная формула этого параграфа, (2.8), совпадает с (4.2) в том случае, если неопределенности в координатах  $\Delta x$ ,  $\Delta x'$  становятся достаточно малыми (отличие в коэффициенте, которое при этом остается, связано с тем, что все оценки делались по порядку величины). В частности, в случае оптимального режима измерения, когда можно воспользоваться формулой (4.3), неопределенностями координат можно пренебречь, если

$$\Delta x + \Delta x' \ll \sqrt{\frac{2\hbar\tau |\Omega_n^2 - \omega^2|}{m\Omega_n^2}}. \quad (4.4)$$

Если состояния осциллятора специально не приготавливаются (например, при помощи измерения координаты с большой точностью), то осциллятор с наибольшей вероятностью находится в так называемом *когерентном состоянии*, которое является наиболее близким к классическому. В этом случае неопределенность координаты равна  $\Delta x = \sqrt{\hbar/2m\omega}$ . Действие силы не нарушает когерентности состояния. Если измерения производятся в оптимальном режиме, т. е. на границе классического режима, то редукция состояния мала и, следовательно, также не нарушает когерентности. Следовательно, после измерения неопределенность координаты останется той же  $\Delta x' = \sqrt{\hbar/2m\omega}$ . В этом случае условие (4.4) переходит в

$$\sqrt{\omega\tau |\Omega_n^2 - \omega^2|} \gg \Omega_n.$$

При выполнении этого условия остаются справедливыми формулы для оптимальных измерений, выведенные в § 2. Другими словами, в формуле (4.3) первый член является доминирующим. Если же измерение производится достаточно близко к резонансу, так что выполняется противоположное условие (его можно записать в виде

$|\Omega_n - \omega| \leq \tau^{-1}$ ), то доминирует, наоборот, второй член, что дает для точности резонансных измерений

$$\delta F_{\text{res}}^{\text{opt}} \simeq 2 \sqrt{2} \frac{\sqrt{\hbar m \omega}}{\tau}. \quad (4.5)$$

Таким образом, приближая частоту измеряемой составляющей к резонансной частоте, нельзя добиться сколь угодно большой точности, если не готовить соответствующим образом состояний осциллятора. Однако формула (4.3) подсказывает, как можно попытаться преодолеть ограничение (4.5) с помощью приготовления состояний. Для этого нужно лишь с достаточной высокой точностью измерять координату осциллятора перед спектральными измерениями и непосредственно после них. Если одновременно уменьшать неопределенности координат  $\Delta x$ ,  $\Delta x'$  и приближать частоту  $\Omega_n$  к резонансной частоте\*)  $\omega$ , то формально можно сделать погрешность оптимального измерения (4.3) сколь угодно малой.

Здесь, однако, следует сделать несколько оговорок, которые все вместе показывают, что по этому пути если и можно продвигаться, то не так уж далеко:

1) Во всех рассуждениях до сих пор мы считали осциллятор идеальным. Если учесть *диссипативные свойства* осциллятора, то следует учесть и связанные с ними *тепловые шумы*. Снижая границу «измерительных шумов» (4.3), мы в какой-то момент достигнем уровня тепловых шумов. Для снижения их необходимо понижать температуру и повышать *добротность* осциллятора.

2) При приближении к резонансу погрешность измерений в оптимальном режиме  $\Delta a_n^{\text{opt}}$  неограниченно возрастает. (Это парадоксальное обстоятельство связано, конечно, с квантовыми эффектами типа редукции состояния и принципа неопределенности.) При этом возрастает и амплитуда колебаний (вблизи резонанса даже малая сила вызывает сильные колебания). Однако при этом начинают проявляться отличия реального осциллятора от гармонического — его *ангармоничность*, так что формулы, выведенные в предположении идеального гармонического осциллятора, становятся неприменимыми. Значит, еще одно условие повышения точности — обеспечение гармоничности при все больших амплитудах колебаний.

3) Все полученные выводы были сделаны в предположении, что измеряются составляющие  $x_n$ , определяемые разложением (1.1). Прибор, который производил бы спектральный анализ, выделяя именно такую спектральную составляющую, сконструировать сложно. Вдали от резонанса это не имело значения. Достаточно, чтобы прибор измерял полосу частот (непрерывного спектра) шириной порядка  $\pi/\tau$ . Но если мы хотим выжать все, что обещает

\*) Как видно из формулы  $\Omega_n = n\pi/\tau$ , для этого необходимо, чтобы интервал измерения  $\tau$  был согласован с резонансной частотой, содержал целое число полупериодов. Это напоминает предложенную в [50] процедуру *стробоскопических измерений* осциллятора, при которых его координата измеряется в моменты времени, отстоящие на целое число полупериодов.



формула (4.3), то при приближении к резонансу следует все более точно выполнять спектральный анализ, предписываемый разложением (1.1). Это приведет к очень большим техническим сложностям (см. в связи с этим следующий параграф).

Все это вместе взятое приводит к выводу, что реалистической оценкой точности резонансных измерений является все же формула (4.5). Возможно, что уменьшение неопределенностей  $\Delta x$ ,  $\Delta x'$  при помощи измерения координаты позволит несколько снизить этот предел, но, по-видимому, не намного.

### § 5\*. Формулировка результатов в терминах непрерывного спектра

До сих пор под спектральными измерениями мы понимали измерение *дискретных частотных составляющих*  $x_n$ ,  $n=1, 2, \dots$ , которые в совокупности определяют непрерывную функцию  $x(t)$  на отрезке  $[0, \tau]$ . Эта функция восстанавливается по своим составляющим с помощью формулы

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sin \Omega_n t, \quad \Omega_n = \frac{n\pi}{\tau}. \quad (5.1)$$

На практике чаще пользуются *непрерывным спектром*, т. е. разложением функций в интеграл Фурье:

$$x(t) = \int_0^{\infty} d\Omega (A(\Omega) \cos \Omega t + B(\Omega) \sin \Omega t), \quad (5.2)$$

где

$$A(\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t) \cos \Omega t,$$

$$B(\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t) \sin \Omega t,$$

и под спектральным анализом сигнала понимают анализ его относительно такого рода разложения. Поэтому если не сказать, как выглядят полученные результаты на языке непрерывного спектра, может возникнуть недоразумение. Для того чтобы связать друг с другом оба разложения (5.1) и (5.2), достаточно разложить в интеграл Фурье (5.2) обе части равенства (5.1). При этом следует считать, что функции, фигурирующие в обеих частях этого равенства, отличны от нуля лишь на интервале  $[0, \tau]$ , а вне этого интервала равны нулю. Проведем несложные вычисления, получим

$$A(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n A_n(\Omega), \quad B(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n B_n(\Omega), \quad (5.3)$$



где

$$\begin{aligned} A_n(\Omega) &= \frac{\Omega_n [\cos(\Omega - \Omega_n)\tau - 1]}{\pi(\Omega^2 - \Omega_n^2)}, \\ B_n(\Omega) &= \frac{\Omega_n \sin(\Omega - \Omega_n)\tau}{\pi(\Omega^2 - \Omega_n^2)}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Мы получаем, что функции, отличные от нуля лишь на интервале  $[0, \tau]$ , имеют спектральные разложения  $A(\Omega)$ ,  $B(\Omega)$  специального вида. Эти разложения составлены из отдельных блоков  $(A_n(\Omega), B_n(\Omega))$ , входящих с произвольными коэффициентами  $x_n$ , и только эти коэффициенты зависят от исходной функции  $x(t)$ .

В предыдущих пунктах мы говорили всегда об измерении коэффициентов  $x_n$ . Если пользоваться языком непрерывного спектра, то измерение  $x_n$  описывается довольно сложно. Прибор должен реагировать лишь на то, какова доля блока  $(A_n(\Omega), B_n(\Omega))$  в спектральном разложении  $(A(\Omega), B(\Omega))$ . Эта доля, т. е. коэффициент  $x_n$ , и есть результат измерения.

Что можно сказать о действии обычного спектрального анализатора, т. е. прибора, который не производит анализа по блокам вида (5.4), а оценивает, скажем, коэффициенты  $A(\Omega)$ ,  $B(\Omega)$ , усредненные по узкому частотному интервалу шириной  $\Delta\Omega$ ? Выводы можно сделать, учитывая, что каждый из блоков вида (5.4) имеет ширину порядка  $\tau^{-1}$ . Это значит, что на частотах, отстоящих от  $\Omega_n$  на величину порядка  $\tau^{-1}$ , функции (5.4) существенно убывают (по сравнению с их максимумами). По этой причине прибор, измеряющий составляющие в очень узкой полосе частот  $\Delta\Omega \ll \tau^{-1}$ , не может дать практически никакой информации о силе, действовавшей на осциллятор в течение интервала  $[0, \tau]$ . Если прибор измеряет спектральные составляющие в интервале частот порядка  $\tau^{-1}$  вблизи частоты  $\Omega_n$ , то можно считать, что он измеряет коэффициент  $x_n$ . К такому прибору можно отнести все выводы, получаемые в предыдущих параграфах. Это, однако, не относится к частоте  $\Omega_n$ , близкой к резонансной. Для этого случая требуется уточнить утверждение.

Предположим, что прибор измеряет среднюю спектральную составляющую в полосе частот шириной порядка  $\tau^{-1}$  вблизи резонансной частоты  $\omega$ . Очевидно, что это эквивалентно измерению коэффициента  $x_n$  для частоты  $\Omega_n$ , отстоящей от резонансной частоты  $\omega$  на расстояние порядка  $\tau^{-1}$ . При этом можно достичь точности оценки действующей силы (ее резонансной составляющей), равной

$$\delta F_{\text{res}} \leq 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{\hbar m \omega}}{\tau}. \quad (5.5)$$

В предыдущем параграфе тот же предел точности был выведен в предположении, что перед спектральным измерением осциллятор находится в когерентном состоянии. Было показано, что этот предел можно перейти, если кроме спектрального измерения производить достаточно точные измерения координаты осциллятора в моменты

$t=0$ ,  $\tau$ . Однако для того, чтобы реализовать эту возможность, необходимо действительно измерять коэффициент  $x_n$  (для частоты  $\Omega_n$ , достаточно близкой к резонансу). В терминах непрерывного спектра это означает, что прибор должен измерять ту долю, которую в непрерывном спектре составляет блок вида (5.4). Это означает, в частности, что измерения должны вестись в полосе частот, намного более широкой, чем  $\tau^{-1}$ , чтобы даже те участки спектра, где амплитуды  $A_n(\Omega)$ ,  $B_n(\Omega)$  малы (но не равны нулю), были учтены. Повидимому, такого рода измерения реализовать трудно (хотя принципиально возможно). Поэтому практически предельная точность, достижимая при измерениях вблизи резонанса, определяется формулой (5.5).

## § 6. Спектральные измерения в системе двух связанных осцилляторов

Подробно проанализировав спектральные измерения в самой простой системе — гармоническом осцилляторе, — мы кратко рассмотрим систему более сложную. В качестве примера возьмем систему двух связанных осцилляторов. Следует отметить, что такая система может служить моделью некоторых практически важных измерительных систем. Например, в гравитационной антенне типа антенны Вебера чувствительный элемент представляет собой массивное упругое тело, которое можно рассматривать как осциллятор (точнее, одну моду колебаний этого тела, которая подвергается измерению, можно рассматривать как осциллятор). Если датчик, воспринимающий колебания этого тела, включен в цепь электрического контура, то чувствительный элемент вместе с датчиком представляют собой систему двух связанных (взаимодействующих) осцилляторов.

Обозначим параметры двух осцилляторов через  $(m_1, \omega_1)$  и  $(m_2, \omega_2)$ . Для удобства первый из этих осцилляторов назовем основным, а второй — вспомогательным. Будем предполагать, что внешняя сила действует на первый (основной) осциллятор, а измерению подвергается второй (вспомогательный). Это значит, что лагранжиан системы имеет вид

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 - \frac{1}{2} m_1 \omega_1^2 x_1^2 + x_1 f - g x_1 x_2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} m_2 \omega_2^2 x_2^2 \quad (6.1)$$

( $x_1$  и  $x_2$  — координаты основного и вспомогательного осцилляторов,  $g$  — коэффициент связи между ними), а измерению подвергаются частотные составляющие координаты  $x_2$ , определяемые разложениями ( $\Omega_n = n\pi/\tau$ )

$$x_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{i,n} \sin \Omega_n t, \quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \Omega_n t.$$

Если бы система была классической, она подчинялась бы уравнениям

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + m_1 \omega_1^2 x_1 + g x_2 &= f, \\ m_2 \ddot{x}_2 + m_2 \omega_2^2 x_2 + g x_1 &= 0. \end{aligned}$$

Квантовая система описывается интегралом по путям

$$A(x'_1, x'_2; x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x'_1} d\{x_1\} \int_{x_2}^{x'_2} d\{x_2\} e^{\frac{i}{\hbar} S\{x_1, x_2\}},$$

где  $S = \int_0^\tau dt L$ . Как и в случае одного осциллятора, граничные

условия легко изолировать в виде отдельного множителя, так что главная трудность состоит в вычислении интеграла по путям с нулевыми граничными условиями. Чтобы не усложнять рассмотрение, будем предполагать пока, что граничные условия равны нулю:  $x = z$ ,  $z_i(0) = z_i(\tau) = 0$ . Легко выразить действие  $S\{z\}$  через частотные составляющие  $z_{1n}$  и  $z_{2n}$  и свести интеграл по путям  $\{z\}$  к интегралу по этим частотным составляющим. В результате получаем

$$A = J \prod_{n=1}^{\infty} \int dz_{1n} \int dz_{2n} e^{\frac{i}{\hbar} S_n(z_{1n}, z_{2n})},$$

$$\begin{aligned} S_n(z_{1n}, z_{2n}) = \frac{\tau}{2} \left[ \frac{1}{2} m_1 (\Omega_n^2 - \omega_1^2) z_{1n}^2 + f_n z_{1n} - \right. \\ \left. - g z_{1n} z_{2n} + \frac{1}{2} m_2 (\Omega_n^2 - \omega_2^2) z_{2n}^2 \right]. \end{aligned}$$

Если этот интеграл берется по каждой переменной в бесконечных пределах, то он дает амплитуду перехода при отсутствии каких бы то ни было измерений. Сужая область интегрирования, можно описать любые измерения частотных составляющих  $z_{1n}$ ,  $z_{2n}$ . При этом ясно, что амплитуда факторизуется, представляется в виде произведения амплитуд  $A_n$ , каждая из которых описывает измерение пары частотных составляющих  $z_{1n}$ ,  $z_{2n}$ . Это значит, что измерение частотных составляющих, соответствующих разным частотам, независимы друг от друга.

Рассмотрим измерение частотной составляющей  $z_{2n}$  второго осциллятора на частоте  $\Omega_n$ . Пусть она измеряется с точностью  $\Delta a_{2n}$  и результат измерения равен  $a_{2n}$ . Это значит, что  $z_{1n}$  нужно интегрировать в бесконечных пределах, а  $z_{2n}$  — по интервалу  $[a_{2n} - \Delta a_{2n}, a_{2n} + \Delta a_{2n}]$ . Вместо этого мы будем  $z_{2n}$  интегрировать также в бесконечных пределах, однако с весом

$$\rho_n(z_{2n}) = \exp \left[ -\frac{(z_{2n} - a_{2n})^2}{\Delta a_{2n}^2} \right].$$

В этом случае амплитуда  $A_n$  представляет собой гауссов интеграл, и вычисление его дает для модуля этой амплитуды

$$P_{a_{2n}} = |A_n|^2 = J_n^2 \exp \left[ -\frac{2(a_{2n} - a_{2n}^{(0)})^2}{\Delta a_{2n}^2 + (\Delta a_{2n}^{(p)})^4 / \Delta a_{2n}^2} \right], \quad (6.2)$$



где обозначено

$$a_{2n}^{cl} = - \frac{gf_n}{m_1 m_2 (\Omega_n^2 - \omega_1^2) (\Omega_n^2 - \omega_2^2) - g^2},$$

$$(\Delta a_{2n}^{opt})^2 = \frac{4\hbar m_1 |\Omega_n^2 - \omega_1^2|}{\tau |m_1 m_2 (\Omega_n^2 - \omega_1^2) (\Omega_n^2 - \omega_2^2) - g^2|}.$$

Нетрудно догадаться, что если бы мы не ограничились с самого начала нулевыми граничными условиями, а проделали вычисления для произвольных граничных условий  $x_i(0) = x_i$ ,  $x_i(\tau) = x_i'$ , то получили бы тот же самый результат, только наиболее вероятное значение результата измерения было бы смещено:

$$a_{2n}^{cl} = - \frac{gf_n}{m_1 m_2 (\Omega_n^2 - \omega_1^2) (\Omega_n^2 - \omega_2^2) - g^2} + \eta_{2n}.$$

Здесь  $\eta_{2n}$  есть  $n$ -я частотная составляющая функции  $\eta_2(t)$ , удовлетворяющей условиям

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\eta}_1 + m_1 \omega_1^2 \eta_1 + g \eta_2 &= 0, \\ m_2 \ddot{\eta}_2 + m_2 \omega_2^2 \eta_2 + g \eta_1 &= 0, \\ \eta_i(0) &= x_i, \quad \eta_i(\tau) = x_i'. \end{aligned}$$

Удобно переписать полученные результаты через *собственные частоты* системы двух связанных осцилляторов  $\nu_1, \nu_2$ :

$$\nu_{1,2}^2 = \frac{1}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + \frac{g^2}{m_1 m_2}}. \quad (6.3)$$

В этих обозначениях

$$a_{2n}^{cl} = \eta_{2n} - \frac{gf_n}{m_1 m_2 (\Omega_n^2 - \nu_1^2) (\Omega_n^2 - \nu_2^2)}, \quad (6.4)$$

$$(\Delta a_{2n}^{opt})^2 = \frac{4\hbar |\Omega_n^2 - \omega_1^2|}{\tau m_2 |\Omega_n^2 - \nu_1^2| |\Omega_n^2 - \nu_2^2|}. \quad (6.5)$$

Из распределения (6.2) видно, что наиболее вероятным является результат измерения  $a_{2n} = a_{2n}^{cl}$ . Это значит, что наилучшая оценка силы, действующей на осциллятор, на основании результата измерения  $a_{2n}$  есть

$$f_n^{(0)} = - \frac{m_1 m_2 (\Omega_n^2 - \nu_1^2) (\Omega_n^2 - \nu_2^2)}{g} (a_{2n} - \eta_{2n}). \quad (6.6)$$

Погрешность этой оценки определяется разбросом результатов измерения, который также очевиден из распределения (6.2). Это дает

$$(f_n - f_n^{(0)})^2 \leq \frac{m_1^2 m_2^2}{2g^2} (\Omega_n^2 - \nu_1^2)^2 (\Omega_n^2 - \nu_2^2)^2 \left[ \Delta a_{2n}^2 + \frac{(\Delta a_{2n}^{opt})^4}{\Delta a_{2n}^2} \right]. \quad (6.7)$$

При  $\Delta a_{2n} \gg \Delta a_{2n}^{opt}$  осуществляется классический режим измерения и погрешность оценки уменьшается с уменьшением погрешности

измерения. При  $\Delta a_{2n} \ll \Delta a_{2n}^{\text{opt}}$  режим становится квантовым, и погрешность оценки силы растет с уменьшением погрешности измерения (следствие редукции состояния). Оптимальный режим измерения соответствует выбору  $\Delta a_{2n} \simeq a_{2n}^{\text{opt}}$ . При этом

$$(f_n - f_n^{(0)})^2 \leq (\delta f_n^{\text{opt}})^2 = \frac{4\hbar m_1^2 m_2}{\tau \varepsilon^2} |\Omega_n^2 - \omega_1^2| \cdot |\Omega_n^2 - \nu_1^2| \cdot |\Omega_n^2 - \nu_2^2|. \quad (6.8)$$

Формально из (6.8) следует, что при приближении к частоте основного осциллятора  $\omega_1$  или к любой из резонансных частот  $\nu_{1,2}$  погрешность оптимальных измерений становится сколь угодно малой. Однако при этом следует иметь в виду те оговорки, которые были сделаны относительно резонансных измерений в § 4. Практически из рассмотрений § 4 (а также § 5) следовало, что максимальная достижимая точность такова, как будто мы можем приближаться к резонансной частоте не ближе, чем на  $\tau^{-1}$ . В случае двух связанных осцилляторов дело обстоит точно так же. Однако есть и существенная разница между одним осциллятором и системой двух связанных осцилляторов. Дело в том, что если при приближении к резонансным частотам  $\nu_{1,2}$  оптимальная погрешность измерений  $\Delta a_{2n}^{\text{opt}}$  возрастает, так что встает вопрос об учете ангармоничности осцилляторов, то при приближении к частоте  $\omega_1$  величина  $\Delta a_{2n}^{\text{opt}}$  уменьшается (это следует из формулы (6.5)). Эффекты ангармоничности в этом случае не возникают. Правда, при этом остаются другие проблемы: 1) необходимость уменьшать неопределенности координат осцилляторов до и после измерения; 2) необходимость производить сложный спектральный анализ для выделения и измерения составляющей  $x_{2n}$ ; 3) необходимость увеличивать добротность осцилляторов и уменьшать температуру для снижения тепловых шумов.

Если не пытаться измерять в точности составляющую  $x_{2n}$  (см. § 5, где выясняется, что это значит), а просто измерять интенсивность колебаний в полосе частот порядка  $\tau^{-1}$ , то это эквивалентно тому, что мы можем приблизиться к характерной частоте лишь на расстояние порядка  $\tau^{-1}$ . Тогда для точности оценивания вблизи частоты  $\omega_1$  получаем

$$\delta f_{\omega_1}^{\text{opt}} \simeq 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{\hbar m_1 \omega_1}}{\tau}. \quad (6.9)$$

Точно так же, полагая  $|\Omega_n - \nu_1| \simeq \tau^{-1}$  или  $|\Omega_n - \nu_2| \simeq \tau^{-1}$ , получим две другие оценки:

$$\delta f_{\nu_1}^{\text{opt}} \simeq 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{\hbar m_1 \nu_1}}{\tau} \sqrt{\frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{\omega_1^2 - \nu_2^2}},$$

$$\delta f_{\nu_2}^{\text{opt}} \simeq 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{\hbar m_1 \nu_2}}{\tau} \sqrt{\frac{\nu_2^2 - \nu_1^2}{\omega_1^2 - \nu_1^2}}.$$

Можно попытаться преодолеть эти ограничения, подходя к частотам  $\omega_1, \nu_1, \nu_2$  ближе, чем на  $\tau^{-1}$ . Однако в этом случае необходимо, во-первых, позаботиться о таком спектральном анализе сигнала, при котором выделяется в точности составляющая  $x_{2n}$  (см. об этом § 5), а во-вторых, уменьшить неопределенность координат осцилляторов до и после измерения, производя измерение этих координат с большой точностью. Чтобы найти зависимость  $\delta f_n^{\text{опт}}$  от неопределенностей  $\Delta x_i, \Delta x'_i$ , необходимо выяснить, как величина  $\gamma_{2n}$ , входящая в оценку (6.6), зависит от  $x_i, x'_i$ .

Для этого удобно воспользоваться матричным формализмом. Введем двумерный вектор-столбец  $\eta(t)$  с компонентами  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$ . Тогда уравнение для этого вектора можно записать в виде

$$\ddot{\eta} + \omega^2 \eta = 0, \quad \eta(0) = x, \quad \eta(\tau) = x',$$

где введена матрица для описания частот и констант связи, а также векторы для описания граничных условий:

$$\omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & g \\ g & \omega_2^2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad x' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}.$$

Полагая  $\eta(t) = R(t)x$ , где  $R(t)$  — матрица, получим для этой матрицы уравнение и граничные условия

$$\ddot{R} + \omega^2 R = 0; \quad R(0) = 1, \quad R(\tau)x = x'. \quad (6.10)$$

Для решения задачи (6.10) удобно разложить матрицу  $R$  по матрицам Паули

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

Правила умножения для линейных комбинаций таких матриц имеют вид

$$(a\sigma)(b\sigma) = (ab) \cdot 1 + i(a \times b)\sigma.$$

Матричная частота записывается через матрицы Паули в виде  $\omega^2 = l_0 1 + l\sigma$ , где обозначено

$$l_0 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2), \quad l_3 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 - \omega_2^2);$$

$$l_1 = \frac{1}{2}g\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right), \quad l_2 = \frac{i}{2}g\left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right).$$

Разлагая матрицу  $R$  по матрицам Паули и пользуясь правилами умножения для матриц Паули, легко показать, что общее решение уравнения (6.10) имеет вид

$$R(t) = A_1 \sin(\nu_1 t + \varphi_1)(1 + n\sigma) + A_2 \sin(\nu_2 t + \varphi_2)(1 - n\sigma),$$

где обозначено  $n = l/|l|$ , а  $\nu_{1,2} = \sqrt{l_0 \pm |l|}$  — собственные частоты. Произвольные постоянные  $A_{1,2}, \varphi_{1,2}$  в принципе можно определить из граничных условий (6.10), однако в явном виде эти постоянные нам не понадобятся. Дело в том, что нам требуется не сама функция  $\eta(t) = R(t)x$ , а коэффициенты разложения ее в ряд Фурье:

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{(k)} \sin \Omega_k t.$$



Используя полученное выражение для функции  $R(t)$ , а также граничные условия (6.10), можно показать, что коэффициенты Фурье равны

$$\eta_{(k)} = (\alpha_k + \beta_k n\sigma) [(-1)^k x' - x], \quad (6.12)$$

$$\alpha_k = \frac{\Omega_k}{v_1 - \Omega_k} + \frac{\Omega_k}{v_2 - \Omega_k}, \quad \beta_k = \frac{\Omega_k}{v_1 - \Omega_k} - \frac{\Omega_k}{v_2 - \Omega_k}.$$

Отсюда, в частности, для интересующей нас величины  $\eta_{2k}$  (второй компоненты вектора  $\eta_{(k)}$ ) легко получить

$$\eta_{2k} = \beta_k (n_1 - in_2) [(-1)^k x'_1 - x_1] + (\alpha_k - n_3 \beta_k) [(-1)^k x'_2 - x_2].$$

Именно эту величину следует подставлять в формулы (6.4) и (6.6).

Теперь мы можем выяснить, как увеличится разброс результатов измерения, если координаты осцилляторов до и после измерения известны с точностью до  $\Delta x_i$ ,  $\Delta x'_i$ . Неопределенности положений осцилляторов приводят к неопределенности в величине  $\eta_{2k}$ , равной

$$\Delta \eta_{2k} = |\beta_k| |n_1 + in_2| (\Delta x_1 + \Delta x'_1) + |\alpha_k - n_3 \beta_k| (\Delta x_2 + \Delta x'_2) =$$

$$= \frac{\Omega_k}{|\Omega_k - v_1| |\Omega_k - v_2|} \left[ \frac{2|g|}{m_2(v_1 + v_2)} (\Delta x_1 + \Delta x'_1) + \right.$$

$$\left. + \left| \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{v_1 + v_2} + (v_1 + v_2 - 2\Omega_k) \right| (\Delta x_2 + \Delta x'_2) \right].$$

Это дает дополнительный вклад в разброс результатов измерения  $a_{2n}$ , возникающий из-за того, что в выражении (6.4) первый член известен неточно. Это, в свою очередь, приводит к увеличению погрешности в оценке действующей силы. Вместо (6.8) при оптимальном режиме измерений получаем

$$\delta f_k^{\text{opt}} \simeq \frac{2m_1}{|g|} \sqrt{\frac{\hbar m_2}{\tau} \left| \Omega_k^2 - \omega_1^2 \right| \cdot \left| \Omega_k^2 - v_1^2 \right| \cdot \left| \Omega_k^2 - v_2^2 \right|} +$$

$$+ \frac{m_1 m_2 \left| \Omega_k^2 - v_1^2 \right| \cdot \left| \Omega_k^2 - v_2^2 \right|}{|g|} \Delta \eta_{2k}. \quad (6.13)$$

Эта формула позволяет находить погрешность оценивания силы на всех частотах, в том числе и вблизи одной из характерных частот  $\omega_1$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ , когда первый член в ней обращается в нуль.

## КОММЕНТАРИИ К ЧАСТИ I

Литература по квантовой теории измерений многообразна и обширна. Из работ общего характера отметим здесь лишь две недавно появившиеся монографии Хелстрема [76] и Холево [79]. В особенности интересна книга Холево, в которой разработана концепция статистической модели, включающая как частные случаи и классическую, и квантовую теории измерений. Однако в этой книге совершенно не затрагиваются такие темы, которые в основном интересовали нас в ч. I: теория непрерывных измерений и редукция состояния при измерении. Остановимся подробнее на тех работах, которые имеют непосредственное отношение к рассматриваемым здесь вопросам.

По-видимому, первым, кто всерьез поднял вопрос о квантовых эффектах при макроскопических измерениях, был В. Б. Брагинский. В работах Брагинского и его сотрудников [44—47] было отмечено, что при высокой добротности системы квантовые эффекты начинают сказываться задолго до того, как величина  $\hbar \omega$  превысит  $kT$ , и по этой причине могут стать существенными для практических измерений, в частности, для работы гравитационных антенн. С тех пор вопрос неоднократно обсуждался в работах различных авторов [48—59]. Вопрос о максимальной чувствительности гравитационной

антенны остается основным среди приложений подобных исследований. Автор обратил внимание на проблему квантовых измерений впервые в 1970 году в результате дискуссий с В. Б. Брагинским и В. Н. Руденко. Тогда же возникла мысль применить для решения этой проблемы интегрирование по путям в конечных пределах. Однако реализована она была значительно позднее [81—83].

В основе работ Брагинского лежала идея *квантовонеразрушающих измерений*, т. е. измерений, при которых состояние измеряемой системы вообще не меняется. Были предложены схемы измерений, близких к квантовонеразрушающим [49]. В работе Торна и других [54] было показано, что примером квантовонеразрушающего непрерывного измерения является измерение в последовательные моменты времени наблюдаемой, составленной из координаты и импульса гармонического осциллятора,  $X_1 = x \cos \omega t - (p/m\omega) \sin \omega t$ . В работе Брагинского и др. [50] показано, что если измерять мгновенные значения координаты осциллятора в последовательные моменты времени, отстоящие на полпериода, то в принципе можно обнаружить действующую на осциллятор силу сколь угодно малой величины. В работе Гусева и Руденко [57] к расчету квантовых ограничений на чувствительность гравитационной антенны был применен метод оптимальной фильтрации Хельстрема—Стратоновича [65—67, 76].

Применение интегрирования по путям «в конечных пределах» к задаче о непрерывных измерениях предложено в работе автора [81]. В ней метод проиллюстрирован на примере измерения пути (слежения за координатой) гармонического осциллятора. В работе [82] он применен к вопросу о спектральных измерениях гармонического осциллятора. Результаты, касающиеся спектральных измерений в системе двух связанных осцилляторов, кратко резюмированы в [83]. В этой книге рассмотрены те же самые задачи, однако рассмотрение гораздо полнее. В частности, учтены неопределенности координат измеряемой системы до и после измерения, и показано, что эти неопределенности накладывают существенные ограничения на точность резонансных измерений.

Теория измерений обсуждалась в данной книге с такой точки зрения, что понятие квантовонеразрушающего измерения осталось в стороне. Однако можно связать это понятие с полученными результатами. На примерах мы убедились, что режим измерения может быть классическим или квантовым в зависимости от точности, с которой производится измерение. Квантовый режим возникает в том случае, когда точность измерения превышает определенную величину: «квантовый порог». Тогда возникает явление редукции состояния измеряемой системы, т. е. измерение неизбежно влияет на состояние измеряемой системы. Ясно, что измерение в таком режиме является «квантово разрушающим». И наоборот, измерение, проведенное в классическом режиме, при котором прибор не влияет на измеряемую систему, является «квантовонеразрушающим». Приблизительно квантовонеразрушающим является и измерение в оптимальном режиме, пограничном между классическим и квантовым.

С этой точки зрения понятие квантовонеразрушающего измерения становится тождественным понятию классического режима измерения. Любое измерение оказывается классическим, т. е. квантовонеразрушающим, если производить его с точностью, не превышающей квантовый порог. Однако это, конечно, расширительное толкование термина «квантовонеразрушающее измерение». Первоначальное значение, подразумевавшееся в работах Брагинского, означает, что для данного класса измерений квантового порога вообще не существует, так что при любой точности измерение остается чисто классическим, не влияя на состояние измеряемой системы.



## ГРУППА ПУТЕЙ В КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ И ГРАВИТАЦИИ

---

В части I мы рассматривали квантовую теорию непрерывных измерений, основанную на интегрировании по путям «в конечных пределах». Сейчас, в части II, речь будет идти о совершенно других вопросах. Мы познакомимся с определением группы путей и с применением ее в калибровочной теории. Эту часть можно читать независимо от части I.

В квантовой теории свободных полей (или частиц) важную роль играют группа Пуанкаре и ее представления и в особенности ее подгруппа — группа трансляций. Роль этой группы связана с однородностью пространства-времени. Однако теория частиц, движущихся в силовых полях, уже не может основываться на этой группе, так как поля делают пространство-время неоднородным: для частицы, движущейся в этом пространстве-времени, область с сильным полем совсем не похожа на область, где поле является слабым. Оказывается, однако, что если ввести другую группу — так называемую группу путей, являющуюся обобщением группы трансляций, — то частицы во внешнем поле можно описывать в терминах представлений этой группы. В частности, ковариантная производная, играющая центральную роль в калибровочной теории и гравитации, получает интерпретацию как генератор представления группы путей. Это совершенно аналогично тому, как обычная производная оказывается генератором группы трансляций.

Трактовка калибровочной теории и гравитации с точки зрения группы путей и ее представлений, а также вытекающие из этой трактовки новые возможности, будут предметом обсуждения в части II книги. Мы увидим, что группа путей делает очевидными как сходство, так и принципиальные различия, существующие между калибровочными полями и гравитационным полем.

То, что группа путей делает возможным единый подход к калибровочной теории и гравитации, показывает, что она обладает большой степенью универсальности. Напршивается мысль о том, чтобы придать этому математическому инструменту самостоятельный физический смысл. С самого начала ясно, что группа путей является обобщением группы трансляций, применимым не только к свободным частицам, но и к частицам, движущимся во внешнем поле. Мы постараемся показать, что с этим обобщением связан



принципиально новый уровень понимания физических явлений. Этот уровень характеризуется тем, что локальные и глобальные (относительно пространства-времени) аспекты теории рассматриваются в неразрывном единстве.

## Глава 5

### КАЛИБРОВОЧНОЕ ПОЛЕ И ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Начиная со следующей главы и на протяжении всей этой части мы последовательно будем развивать калибровочную теорию на основе группы путей. Однако предварительно в этой главе в самых общих чертах опишем традиционный подход. Вернее, это два подхода. Один из них основан на требовании калибровочной инвариантности, а второй (геометрический) — на теории связностей в расслоенных пространствах.

Строго говоря, эта глава не является совершенно необходимой для чтения последующих глав. (Можно ограничиться лишь первым параграфом.) Однако она полезна для того, чтобы связать результаты, полученные в рамках теоретико-группового подхода, с известными результатами, сформулированными чаще всего на геометрическом языке. Кроме того, геометрическая интерпретация результатов, полученных с помощью группы путей, делает их более действенными. Наиболее гибким и эффективным является метод, использующий по мере надобности все три идеи: 1) идею калибровочной инвариантности; 2) геометрическую интерпретацию калибровочного поля; 3) интерпретацию его как представления группы путей.

#### § 1. Калибровочная инвариантность и калибровочное поле

Мы не собираемся излагать здесь историю калибровочной теории. Напомним лишь основные идеи, приведшие к ней, т. е. проследим вкратце логику теории. Начнем с простейшего варианта этой логики, когда в основу кладется принцип инвариантности относительно калибровочных преобразований.

Прообразом калибровочной теории является теория электромагнитного поля и заряженных частиц. Как известно, такая теория инвариантна относительно *градиентных* или *калибровочных преобразований*:

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow e^{ie\chi(x)}\psi(x), \\ A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) + \chi_{,\mu}(x)\end{aligned}\tag{1.1}$$

(буква  $e$  в показателе экспоненты обозначает заряд частицы, индекс с запятой — дифференцирование по соответствующей координате пространства-времени,  $\chi_{,\mu} = \partial_\mu \chi = \partial\chi/\partial x^\mu$ ). Таким образом, калибровочное преобразование заряженного поля (волновой функ-

ции заряженной частицы) представляет собой просто фазовое преобразование с фазой, зависящей от точки пространства-времени, а калибровочное преобразование электромагнитного поля добавляет к этому полю градиент или продольную часть. Лагранжиан системы электромагнитного и заряженного полей устроен так, что он инвариантен относительно калибровочного преобразования. Свободный лагранжиан электромагнитного поля (сам по себе инвариантный относительно (1.1)) имеет вид

$$L_F = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

где

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}.$$

В момент, когда появилась калибровочная теория или теория Янга—Миллса (1954 год, см. [86]), были уже известны внутренние симметрии частиц. Твердо установлена была симметрия относительно вращений «изотопического пространства». Фактически это означает, что все (тяжелые или сильно взаимодействующие) частицы распадаются на мультиплеты, преобразующиеся по различным неприводимым представлениям группы  $G = SO(3) = SU(2)$ , и теория инвариантна относительно преобразований из этой группы. Пусть  $\psi$  — некоторый мультиплет, преобразующийся по представлению  $g \mapsto U_g$  группы  $G$ .

Для дальнейших рассуждений нам будет несущественно, что существуют различные представления  $U$  одной и той же группы  $G$ . Будем предполагать для простоты, что рассматривается только одно представление (в случае необходимости несколько мультиплетов можно рассматривать как одно приводимое представление). Тогда это представление можно отождествить с самой группой и говорить, что имеется группа  $G$ , элементами которой являются матрицы  $U \in G$ . Каждая матрица (элемент группы) определяет преобразование рассматриваемого мультиплета

$$\psi \mapsto U\psi, \quad \partial_\mu \psi \mapsto U\partial_\mu \psi, \quad U = \text{const.}$$

Инвариантность теории означает, что лагранжиан  $L(\psi, \partial_\mu \psi)$  инвариантен относительно этого преобразования.

Возникает естественный вопрос, нельзя ли расширить группу симметрии, считая, что матрица преобразования  $U$  зависит от точки пространства-времени, т. е. выбирая в различных точках разные элементы группы  $G$ . Это было бы аналогично фазовому преобразованию с фазой, зависящей от точки. Однако мы сразу же убеждаемся, что исходная теория не инвариантна относительно такого преобразования, потому что производная  $\partial_\mu \psi$  преобразуется «неправильно», нековариантно:

$$\psi \mapsto U\psi, \quad \partial_\mu \psi \mapsto U\partial_\mu \psi + U_{,\mu}\psi, \quad U = U(x).$$

Тем не менее Янг и Миллс в своей классической работе [86] потребовали, чтобы лагранжиан был инвариантен относительно



такого преобразования, и показали, что этого можно добиться добавлением нового поля, точнее — мультиплета векторных полей.

Известно, что электродинамика инвариантна относительно преобразований (1.1) фактически из-за того, что производная  $\partial_\mu \psi$  входит в лагранжиан только в комбинации  $\nabla_\mu \psi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi$ , которая называется *ковариантной производной*. Янг и Миллс предложили в теории с внутренней симметрией также ввести дополнительное поле  $A_\mu$  и с его помощью сконструировать ковариантные производные. Усложнение, связанное с тем, что теперь мы имеем неабелеву группу симметрии  $G$ , состоит в следующем. Новое поле в каждой точке должно быть не числом, как в электродинамике, а матрицей. Точнее,  $A_\mu(x)$  должно быть элементом алгебры Ли группы симметрии  $G$ . Обозначим это так:  $A_\mu(x) \in \text{Alg } G$ . С помощью такого матричнозначного поля определим *ковариантную производную* как комбинацию

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - iA_\mu(x). \quad (1.2)$$

Теперь введем в лагранжиан новое поле, просто заменив в исходном лагранжиане обычные производные на ковариантные,  $\partial_\mu \psi \rightarrow \nabla_\mu \psi$ . Получим лагранжиан  $L(\psi, \nabla_\mu \psi)$ , который имеет тот же аналитический вид, что и исходный, однако аргументами его теперь являются поле  $\psi$  и его ковариантная производная  $\nabla_\mu \psi$ . Ясно, что при такой конструкции новый лагранжиан будет инвариантен относительно преобразования

$$\psi \mapsto U\psi, \quad \nabla_\mu \psi \mapsto U\nabla_\mu \psi, \quad U = U(x) \quad (1.3)$$

просто потому, что исходный лагранжиан был инвариантен относительно преобразования с матрицей  $U$ , не зависящей от  $x$ . Значит, поставленная задача будет решена, если мы только добьемся, чтобы ковариантные производные в самом деле *преобразовывались* согласно формуле (1.3) *ковариантно*. Нетрудно видеть, что это будет иметь место, если преобразование нового поля  $A_\mu$  определить следующим образом:

$$A_\mu \mapsto UA_\mu U^{-1} - iU_\mu U^{-1}. \quad (1.4)$$

Таким образом, лагранжиан, инвариантный относительно *глобальных преобразований*  $U = \text{const}$ , удастся сделать инвариантным относительно *локализованных преобразований*  $U = U(x)$ . Для этого требуется лишь предположить существование нового поля  $A_\mu$ , называемого калибровочным, и ввести его в лагранжиан, заменив обычные производные  $\partial_\mu \psi$  на ковариантные  $\nabla_\mu \psi$ , определенные формулой (1.2). Новое поле называется калибровочным полем или *полем Янга — Миллса\**). Преобразования вида (1.3), (1.4)

\*) Чаше термин «поле Янга—Миллса» оставляют для случая, когда  $G = SU(2)$  — группа изотопического спина, однако иногда используют и в общем случае. Термин же «калибровочное поле» используется в случае произвольной исходной группы симметрии  $G$ .



называются *калибровочными преобразованиями*. Следует обратить внимание на то, что *калибровочной группой* обычно называют (конечнопараметрическую) группу  $G$ , а *группой калибровочных преобразований* — (бесконечно-параметрическую, т. е. зависящую от функций) группу преобразований вида (1.3), (1.4).

Задача построения калибровочно-инвариантного лагранжиана уже выполнена. Однако этот лагранжиан еще не вполне удовлетворителен, так как в его составе нет свободного лагранжиана поля  $A_\mu$ . Чтобы его получить, из *вектор-потенциала*  $A_\mu$  строят напряженность поля

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} - i[A_\mu, A_\nu]. \quad (1.5)$$

Нетрудно видеть, что при калибровочных преобразованиях (1.4) напряженность преобразуется по закону

$$F_{\mu\nu} \mapsto U F_{\mu\nu} U^{-1}. \quad (1.6)$$

Этот закон является для матриц *ковариантным законом преобразования* так же, как закон (1.3) является ковариантным для векторов. Из (1.6) следует, что квадратичная комбинация

$$L_F = -\frac{1}{4} \text{Tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (1.7)$$

остаётся инвариантной относительно калибровочных преобразований (1.6) (при доказательстве нужно воспользоваться тем, что под знаком следа матрицы-сомножители можно циклически переставлять). Поскольку выражение (1.7) является еще и лоренцевским скаляром, его можно использовать в качестве *свободного лагранжиана калибровочного поля*. Так обычно и делают, хотя соображения инвариантности не запрещают взять любую функцию от величины (1.7) в качестве свободного лагранжиана.

Тот факт, что  $A_\mu(x)$  — матрица, не является существенным. Рассматривая отдельные матричные элементы этой матрицы, мы получим целый набор полей, каждое из которых является уже обычным (числовым) векторным полем. Лагранжиан (1.7) является фактически суммой свободных лагранжианов для этих полей. Вместо того, чтобы брать матричные элементы, можно поступить иначе. Рассмотрим любой *базис алгебры Ли*  $\text{Alg } G$ . Обозначим матрицы, образующие этот базис, через  $T_a$ , где индекс  $a$  нумерует генераторы, или, что то же, параметры группы  $G$ . Поскольку  $A_\mu(x) \in \text{Alg } G$ , можно разложить эту матрицу по базису:

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x) T_a \quad (1.8)$$

(предполагается суммирование по повторяющимся индексам). Теперь  $A_\mu^a(x)$  — обычные векторные поля (векторные, поскольку у них остался векторный лоренцевский индекс  $\mu$ ). Индекс  $a$  нумерует эти поля. Всего получается столько же векторных полей, сколько параметров имеет группа  $G$ . На самом деле способ разложения по базису  $T_a$  предпочтительнее, чем выделение матричных

элементов, так как в последнем случае получившиеся поля, вообще говоря, не все независимы.

Тот же базис  $T_a$  можно использовать и для того, чтобы детализировать структуру матрицы преобразования  $U$ . Поскольку это матрица из группы  $G$ , она выражается как экспонента от элемента алгебры Ли и поэтому может быть представлена в виде

$$U(x) = e^{\chi^a(x) T_a}. \quad (1.9)$$

Напряженность поля (1.5) может быть разложена по базису с помощью коммутационных соотношений в алгебре Ли:

$$[T_a, T_b] = f_a^c T_c, \quad (1.10)$$

где  $f_a^c$  — структурные константы группы  $G$ .

Любые элементы алгебры Ли, в том числе и генераторы, удовлетворяют так называемому тождеству Якоби

$$[T_a [T_b T_c]] + [T_b [T_c T_a]] + [T_c [T_a T_b]] = 0.$$

Следовательно, структурные константы удовлетворяют соотношению

$$f_a^d f_b^c + f_b^d f_a^c + f_c^d f_a^b = 0.$$

Если ввести матрицы, элементами которых являются структурные константы,  $[F_a]^b_c = f_a^b c$ , то это соотношение можно записать как коммутационное соотношение

$$[F_a F_b] = f_a^c F_c. \quad (1.11)$$

Отсюда видно, что матрицы  $F_a$  сами образуют некоторое представление генераторов алгебры Ли, т. е. отображение  $T_a \mapsto F_a$  — изоморфизм базисов и порождает изоморфизм алгебр Ли. Получается так называемое присоединенное представление алгебры Ли, соответствующее присоединенному представлению группы Ли  $G$ .

С помощью соотношения (1.10) формула (1.5) переписывается в виде

$$F_{\mu\nu}^a = A_{\nu,\mu}^a - A_{\mu,\nu}^a - if_b^a A_\mu^b A_\nu^c, \quad (1.12)$$

где обозначено  $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T_a$ . Свободный лагранжиан калибровочного поля (1.7) принимает вид

$$L_F = -\frac{1}{4} g_{ab} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu b}, \quad g_{ab} = \text{Tr}(T_a T_b). \quad (1.13)$$

Преобразования (1.3), (1.4), (1.6) удобно записать в новых обозначениях для бесконечно малых значений параметров  $\delta\chi^a$ . Тогда в первом порядке по  $\delta\chi^a$

$$\begin{aligned} \delta\psi &= \chi^b T_b \psi, \\ \delta F_{\mu\nu}^a &= \chi^b f_b^a F_{\mu\nu}^c, \\ \delta A_\mu^a &= \chi^b f_b^a A_\mu^c - i\chi^a. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Таким образом, построена теория, инвариантная относительно локализованных преобразований из группы симметрии. Это и есть (классическая, некантованная) калибровочная теория. Электродинамика получается из нее как частный случай, если  $G$  — однопараметрическая группа преобразований  $U = \exp(i\epsilon\chi)$ . Теория выглядит чрезвычайно красиво и естественно. Это было ясно с самого начала, поэтому над ней упорно работали, несмотря на возникшие трудности в интерпретации (в 1956 году вышла важная



статья Утиямы [87], а в 1960 году развернутая статья Сакураи [88] открыла целый поток работ, не прекращающийся по сей день). Трудности же состояли в том, что на роль калибровочных полей могли в то время претендовать лишь такие поля, которые заведомо обладали массами (например, гипотетические промежуточные векторные бозоны, переносящие слабые взаимодействия). В то же время имевшаяся тогда теория классических калибровочных полей предсказывала, что массы их обязательно равны нулю (свободный лагранжиан калибровочного поля не может содержать члена вида  $M^2 A_\mu A^\mu$ , так как это разрушило бы калибровочную инвариантность). Трудности в конце концов были преодолены в рамках квантовой теории калибровочных полей, причем это потребовало новых и очень плодотворных идей (спонтанное нарушение симметрии и эффект Хиггса). И преодоление их привело к серьезному продвижению в квантовой теории поля, например к построению перенормируемой теории слабых взаимодействий (см., например, обзоры [92—94], переводы которых опубликованы в [95]).

В следующих параграфах мы познакомимся с интерпретацией калибровочной теории с точки зрения современной дифференциальной геометрии (теории расслоенных многообразий).

## § 2. Главное расслоенное многообразие

Калибровочная теория появилась сначала в чисто алгебраической форме, кратко описанной в предыдущем пункте. Но затем оказалось, что ее можно очень изящно переформулировать как теорию геометрическую (см., например, [91]). Коснемся этого формализма по возможности кратко. Большинство деталей, необходимых на математическом уровне строгости, мы будем опускать (как и вообще систематически делается в этой книге). Это касается, например, детального описания структуры многообразия с помощью покрытия координатными окрестностями.

Основным инструментом современной дифференциальной геометрии является понятие расслоенного многообразия. В частности, для изучения различных геометрических структур над пространством-временем строятся различные расслоенные пространства над пространством-временем. В самом общем случае *расслоение* или *расслоенное пространство*  $\mathcal{P}(\mathcal{X}, \pi)$  — это совокупность двух множеств и отображения одного из них на другое. Множество  $\mathcal{X}$  называется *базой расслоения*, множество  $\mathcal{P}$  — собственно расслоением над базой  $\mathcal{X}$ , отображение  $\pi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$  называется (*канонической*) *проекцией расслоения* на его базу. Каждой точке базы  $x \in \mathcal{X}$  соответствует целая совокупность точек  $\mathcal{P}_x = \pi^{-1}(x)$  в расслоении, каждая из которых переходит в  $x$  при проекции  $\pi$ . Эта совокупность точек называется *слоем* над  $x$ . Описанную конструкцию наглядно можно изобразить в виде рис. 7.

Конечно, такая простейшая структура расслоения является довольно бедной и редко бывает достаточной. Обычно на расслоении вводятся еще некоторые дополнительные структуры. Главная



из них — это структура многообразий. Множество  $\mathcal{X}$  называется *многообразием*, если его элементы (точки) задаются с помощью координат,  $x = (x^1, \dots, x^n)$ . Это значит, что устанавливается взаимнооднозначное соответствие между областями множества  $\mathcal{X}$  и областями в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . В этом случае  $\mathcal{X}$  называется  $n$ -мерным многообразием. Совсем не обязательно, чтобы все множество взаимно однозначно отображалось в область евклидова пространства. Это чаще всего оказывается невозможным. В общем случае координаты вводятся на отдельных областях в  $\mathcal{X}$  — *координатных окрестностях*. Координатные окрестности в своей совокупности покрывают все множество  $\mathcal{X}$ ,

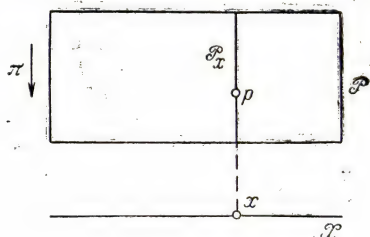


Рис. 7.

так что каждая точка попадает по крайней мере в одну координатную окрестность. А на пересечении координатных окрестностей, где точкам можно сопоставить два или более набора различных координат, между различными координатами устанавливаются правила перехода:  $x'^p = f^p(x^1, \dots, x^n)$ . Обычно накладывается требование, чтобы все функции, описывающие переходы между систе-

мами координат, обладали определенной степенью гладкости. Например, чтобы все они были бесконечно дифференцируемыми. Тогда *многообразие* называется *дифференцируемым*. В этом случае и все остальные структуры, которые вводятся на многообразии, должны описываться не менее гладкими функциями, т. е. эти структуры также должны быть дифференцируемыми.

Очень важным объектом в дифференцируемом многообразии является векторное поле. Если задана некоторая система координат, то *векторное поле* в этой системе можно задать как набор  $n$  функций (компонент вектора)  $A^1(x), \dots, A^n(x)$ . Удобно сопоставить векторному полю оператор дифференцирования

$$A = A^1(x) \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + A^n(x) \frac{\partial}{\partial x^n} = A^1 \partial_1 + \dots + A^n \partial_n = A^\mu \partial_\mu.$$

При этом предполагается, что оператор  $A$  действует в пространстве функций на  $\mathcal{X}$ .

Обычно векторное поле ассоциируется с «полем направлений» на пространстве. Чтобы прийти к этой картине, построим оператор, являющийся экспонентой от  $A$  с произвольным коэффициентом:

$$R_\tau^* = e^{\tau A}.$$

Экспоненту можно определить с помощью разложения в ряд. Нетрудно видеть, что получившийся оператор обладает групповым или мультипликативным свойством относительно параметра  $\tau$  (определяет представление однопараметрической группы):

$$R_\tau^* R_{\tau'}^* = R_{\tau+\tau'}^*.$$

Кроме того, при малом  $\tau$ , когда можно ограничиться двумя членами в разложении экспоненты, имеем

$$R_{\tau}^* \psi(x^1, \dots, x^n) = \psi(x^1 + \tau A^1, \dots, x^n + \tau A^n).$$

Значит, при бесконечно малом  $\tau$  оператор  $R_{\tau}^*$  описывает изменение функции при смещении ее аргумента в направлении  $A$  на величину, пропорциональную  $\tau$ . В силу свойства мультипликативности при конечных  $\tau$  действие оператора  $R_{\tau}^*$  также сводится к смещению аргумента функции. Другими словами, найдется такое преобразование  $R_{\tau}$  многообразия  $\mathcal{X}$ , что

$$R_{\tau}^* \psi(x) = \psi(R_{\tau} x).$$

Таким образом, с векторным полем связана однопараметрическая группа преобразований. При этом преобразовании точки многообразия  $\mathcal{X}$  движутся все время вдоль векторного поля  $A$ . Следовательно, векторное поле действительно задает поле направлений.

*Векторное поле  $A$  будет нами использоваться именно в форме дифференциального оператора.* Однако необходимо помнить также, что его можно рассматривать как задание в каждой точке  $x \in \mathcal{X}$  вектора  $A(x)$ . При этом вектор в точке можно задавать его компонентами  $A^{\mu}(x)$  (которые теперь уже являются не функциями, а числами, так как точка  $x$  зафиксирована). Но можно понимать вектор в точке и как оператор дифференцирования функции в данной точке вдоль данного направления. Можно, конечно, определить вектор в точке и независимо, не отталкиваясь от векторного поля как первоначального понятия, однако нам это не требуется. Все векторы в точке  $x$  образуют  $n$ -мерное линейное пространство, которое называется касательным пространством к многообразию  $\mathcal{X}$  в точке  $x$  и обозначается  $T_x$ .

Определение векторного поля как дифференциального оператора, помимо всего прочего, удобно тем, что автоматически задает закон преобразования компонент векторного поля при переходе от одной системы координат к другой. Если от координат  $x^{\mu}$  мы переходим к координатам  $x'^{\mu}$ , то компоненты вектора  $A^{\mu}$  превращаются в  $A'^{\mu}$  по некоторому определенному закону. Закон этот таков, что после преобразования компонент вектора и координат векторное поле, понимаемое как дифференциальный оператор, не меняется,  $A^{\mu} \partial_{\mu} = A'^{\mu} \partial'_{\mu}$ . Отсюда легко вывести закон преобразования \*) компонент вектора:  $A'^{\mu} = (\partial x'^{\mu} / \partial x^{\nu}) A^{\nu}$ . Разумеется, функции  $A^{\mu}(x)$ , задающие векторное поле, должны быть дифференцируемыми. Тогда *векторное поле* также называется *дифференци-*

---

\*) Закон преобразования от одной системы координат (СК) к другой позволяет задать векторное поле не только в достаточно малой области (локально), но и на всем многообразии (глобально). Многообразие покрывается семейством СК, в каждой СК задается (своими компонентами) векторное поле, а в тех областях, в которых определены одновременно две или более СК, накладывается условие согласования: векторные поля, соответствующие двум СК, получаются друг из друга преобразованием компонент векторного поля по векторному закону.



руемым. Однако такого рода оговорки мы как правило будем опускать.

Расслоение  $\mathcal{S}(\mathcal{X}, \pi)$  называется *расслоенным многообразием*, если оба множества  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{X}$  являются (дифференцируемыми) многообразиями, а проекция  $\pi$  — дифференцируемым отображением (т. е. задается гладкими функциями от координат). Пусть база  $\mathcal{X}$  — это многообразие размерности  $n$ , а само расслоение  $\mathcal{S}$  имеет размерность  $n+m$ . Удобно координаты в этих многообразиях выбирать согласованным образом, так что если  $x=(x^1, \dots, x^n)$ , то точка соответствующего слоя  $p \in \mathcal{S}_x$  имеет координаты  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m)$ . Тогда операция проектирования в координатах выглядит тривиально. Легко видеть, что естественно определяется проектирование и для векторных полей. Если  $\tilde{A}=A^i \partial/\partial x^i + B^j \partial/\partial y^j$  — векторное поле в  $\mathcal{S}$ , то  $A=A^i \partial/\partial x^i$  — векторное поле в  $\mathcal{X}$ , получающееся из  $\tilde{A}$  с помощью проекции  $\pi$ .

Следующая структура, которую удобно ввести на расслоении — это группа. Главным расслоенным многообразием  $\mathcal{S}(\mathcal{X}, G, \pi)$  называется такое расслоенное многообразие, каждый слой которого  $\mathcal{S}_x$  как многообразие ничем не отличается от группы  $G$  и на котором естественным образом задано действие этой группы, переводящее каждый слой в себя. Группа  $G$  называется *структурной группой*. Уточним сказанное. Сначала рассмотрим тривиальное расслоение, представляющее собой просто прямое произведение базы на группу:  $\mathcal{S}=\mathcal{X} \times G$ . При этом каждая точка расслоения представляется парой  $p=(x, g)$ ,  $x \in \mathcal{X}$ ,  $g \in G$ , и проекция осуществляется естественным образом:  $\pi(x, g)=x$ . Действие группы  $G$  на прямом произведении  $\mathcal{X} \times G$  можно естественно определить либо как левый сдвиг, либо как правый сдвиг. Принято определять его как правый сдвиг, т. е.  $R_g: (x, g') \mapsto (x, g'g)$ . Для простоты можно писать так:  $R_g: p \mapsto pg$ . Ясно, что при таком преобразовании каждая точка расслоения переходит в другую точку из того же слоя. Такое расслоение называется *тривиальным* главным расслоенным многообразием.

Общий случай главного расслоенного многообразия отличается от рассмотренного тривиального случая точно так же, как многообразие отличается от области евклидова пространства. Именно, в общем случае все расслоение  $\mathcal{S}$  нельзя представить как прямое произведение  $\mathcal{X} \times G$ , но любую достаточно малую область в  $\mathcal{S}$  можно представить как прямое произведение (тривиализовать). Уточним сказанное. Пусть  $x$  — произвольная точка базы  $\mathcal{X}$ . Тогда обязательно найдется такая (достаточно малая) окрестность  $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$  точки  $x$ , что расслоение над  $\mathcal{U}$  *тривиализуется*. Расслоение над  $\mathcal{U}$  — это  $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ . Тривиализация этого подрасслоения — это отображение его на прямое произведение  $\kappa: \pi^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U} \times G$ . Это отображение должно быть взаимно однозначно (и, конечно, дифференцируемо). Каждой точке  $p \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$  оно сопоставляет пару  $(x, g)$ , где  $x=\pi(p)$ . Еще одно требование состоит в том, что действие группы  $G$ , определенное на всем рас-



слоении  $\mathcal{P}$ , в тривиализованной области выглядит просто как правый сдвиг. Таким образом, если  $x(p) = (x, g')$ , то  $x(pg) = (x, g'g)$ .

Тривиализация расслоения позволяет удобным образом вводить координаты на нем. Достаточно, очевидно, выбрать координаты  $x^u$  на базе  $\mathcal{X}$  и координаты  $y^k$  на группе  $G$ . Тогда в области  $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ , в которой расслоение тривиализуется, координатами могут служить совокупности чисел  $x^u$  и  $y^k$ . В частности, если  $G$  — группа всех (невырожденных) матриц определенной размерности, то координатами на группе могут служить матричные элементы  $g_{\alpha\beta}$  матриц, образующих группу. В этом случае в области  $\pi^{-1}(\mathcal{U})$  координатами точки  $p$ , такой, что  $x(p) = (x, g)$ , могут служить числа  $\{x^u, g_{\alpha\beta}\}$ . Весьма распространена ситуация, когда  $G$  — группа матриц, удовлетворяющих некоторому алгебраическому соотношению (например,  $SO(n)$  — группа  $n$ -рядных матриц с единичным детерминантом и ортогональных). В этом случае матричные элементы матриц не являются независимыми и потому не могут служить координатами. Однако можно от расслоения  $\mathcal{P}$  со структурной группой  $G$  перейти к более широкому расслоению, в котором структурной группой является группа всех матриц соответствующей размерности. Тогда в новом расслоении координатами могут служить числа  $x^u, g_{\alpha\beta}$ , а переход к интересующему нас подрасслоению  $\mathcal{P}$  осуществляется наложением необходимых алгебраических условий на координаты  $g_{\alpha\beta}$ . Этот прием является практически удобным. В частности, мы определим ниже явный вид связности (горизонтальных полей) в координатах  $x^u, g_{\alpha\beta}$  (следовательно, в расширенном расслоении).

Отображение тривиализации  $x: p \mapsto (x, g)$  обеспечивает, таким образом, координаты в области  $\pi^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{P}$ , причем совокупность таких областей покрывает все расслоение  $\mathcal{P}$ . В случае, если две координатные окрестности пересекаются, переход от одной тривиализации к другой (т. е. от одной системы координат к другой) осуществляется с помощью так называемых переходных функций. Пусть  $\mathcal{U}_i$  — области в  $\mathcal{X}$ , над которыми расслоение тривиализуется, причем отображения тривиализации имеют вид  $x_i(p) = (x, \varphi_i(p))$ . Поскольку действие структурной группы сводится к правому сдвигу в тривиализации, должно быть  $\varphi_i(pg) = \varphi_i(p)g$  для любого элемента группы  $g$ . Если две таких области  $\mathcal{U}_i, \mathcal{U}_j$  пересекаются, то над их пересечением расслоение тривиализуется двумя разными способами. Эти способы описываются либо отображениями  $x_i, x_j$ , либо (что то же) отображениями  $\varphi_i, \varphi_j$  из  $\pi^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$  в  $G$ . Одной и той же точке  $p \in \pi^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$  сопоставляется, с одной стороны, пара  $(x, \varphi_i(p))$ , а с другой стороны,  $(x, \varphi_j(p))$ . Обозначим  $\chi_{ij}(p) = \varphi_i(p)[\varphi_j(p)]^{-1}$ . Нетрудно видеть, что функция  $\chi_{ij}$  постоянна на слоях, т. е.  $\chi_{ij}(pg) = \chi_{ij}(p)$ . Поэтому можно считать, что она зависит не от точки расслоения, а от слоя целиком или (что то же) от той точки базы, на которую этот слой проектируется. Будем поэтому писать  $\chi_{ij}(p) = \chi_{ij}(x)$ , где  $x = \pi(p)$ . Получившиеся функции  $\chi_{ij}: \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \rightarrow G$  называются *переходными функциями*. Они описывают склеивание двух различных тривиализаций (двух различных систем координат) друг с другом. Если в  $j$ -й тривиализации некоторой точкой  $\in \mathcal{P}$  соответствует пара  $x_j(p) = (x, g)$ , то в  $i$ -й тривиализации той же точке соответствует пара  $x_i(p) = (x, \chi_{ij}(x)g)$ .

Часто расслоения как многообразия задаются именно с помощью тривиализаций и переходных функций. Если расслоение тривиально, то оно

задается просто как  $\mathcal{X} \times G$ . А если оно нетривиально, то задается совокупностью тривиальных подрасслоений  $\mathcal{U}_i \times G$  и переходных функций  $\chi_{ij}(x)$ , определяющих правила склеивания этих подрасслоений (правила отождествления их точек). Нетрудно видеть, что переходные функции обязательно должны удовлетворять условию согласованности  $\chi_{ij}(x)\chi_{jk}(x) = \chi_{ik}(x)$  (без суммирования по  $j$ ).

Таково определение главного расслоенного многообразия. Суть его состоит в том, что на расслоении задано действие группы

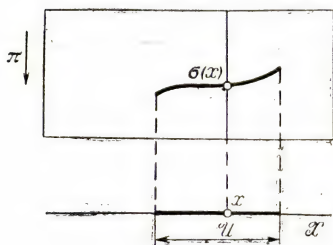


Рис. 8.

$G$  и структура расслоения согласована с этим действием. Действительно, если действие группы задано, то проекцию  $\pi$  можно уже вывести из этого действия. Точки  $p$  и  $p'$  принадлежат одному и тому же слою в том и только в том случае, если  $p' = pg$  для некоторого элемента группы  $g \in G$ . Поэтому группа задает на  $\mathcal{P}$  отношение эквивалентности, и факторизация по этому отношению  $\mathcal{P}/G$  дает множество слоев, т. е. фактически базу  $\mathcal{X}$ .

Тривиализация расслоения (или некоторой его области) сводится к выбору гладкого сечения расслоения. Выбрать сечение — это значит (рис. 8) каждой точке базы  $x \in \mathcal{X}$  сопоставить некоторую точку слоя над ней,  $\sigma(x) \in \mathcal{P}_x$ . Таким образом, сечение  $\sigma$  — это отображение  $\sigma: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}$ , обладающее свойством  $\pi(\sigma(x)) = x$ . Если одна точка слоя выбрана, то все остальные можно получить из нее действием группы. Значит, произвольную точку  $p \in \mathcal{P}_x$  можно представить в виде  $\sigma(x)g$ , подходящим образом выбрав элемент группы  $g$ . Это позволяет, зная сечение, построить тривиализацию. Достаточно каждой точке  $p = \sigma(x)g$  сопоставить пару  $(x, g)$ . Если гладкое сечение можно построить для всего расслоения, то это расслоение тривиально. В нетривиальном случае гладкие сечения существуют лишь над достаточно малыми областями  $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ .

### § 3. Связность на главном расслоенном многообразии — калибровочное поле

На расслоении и, в частности, на главном расслоенном многообразии естественно выделяются направления, соответствующие сдвигам вдоль слоев. Эти направления называются вертикальными. Векторы, касательные к расслоению, которые можно рассматривать одновременно и как векторы, касательные к слою, называются *вертикальными векторами*. Ясно, что вертикальные векторы имеют вид

$$V = B^k \frac{\partial}{\partial y^k},$$



т. е. члены, содержащие  $\partial/\partial x^k$ , в таких векторах отсутствуют. Взяв экспоненту от такого векторного поля (экспоненту от дифференциального оператора), получим преобразование в расслоении, которое каждый слой переводит в себя:

$$e^V = e^{B^k \frac{\partial}{\partial y^k}}.$$

В частности, действие структурной группы в главном расслоенном многообразии представляется в таком виде. Вертикальные векторные поля, порождающие действие структурной группы, называются *фундаментальными векторными полями* в расслоении. Они образуют линейное пространство, изоморфное алгебре Ли группы. Обозначим базис этого пространства через  $V_a$ , так что

$$V_a = B_a^k \frac{\partial}{\partial y^k}.$$

Тогда произвольное фундаментальное поле выражается в виде  $V = \chi^a V_a$  (где  $\chi^a$  — числа), а произвольное преобразование из структурной группы можно представить в виде

$$R_g^* = e^{\chi^a V_a} \quad (3.1)$$

(звездочка отличает оператор, действующий на функции, от преобразования пространства). Ниже мы увидим, как строятся некоторые конкретные реализации базиса фундаментальных полей.

Возникает вопрос, можно ли столь же естественно определить понятие горизонтальных векторов в расслоении. Оказывается, что однозначно ввести такое понятие нельзя. Действительно, единственным ограничением, которое естественно возникает, является требование, чтобы горизонтальные направления были согласованы с действием структурной группы. Это значит, что под действием преобразования из структурной группы горизонтальные направления должны переходить в горизонтальные. Значит, если  $H$  — некоторое *горизонтальное векторное поле*, то после преобразования любым элементом структурной группы  $R_g$  получится новое поле, которое также является горизонтальным. На языке дифференциальных операторов это значит, что векторное поле  $R_g^* H R_{g^{-1}}^*$  опять должно быть горизонтальным. Если использовать представление (3.1), то требование сведется к тому, что  $[V_a, H]$  должно быть горизонтальным полем для каждого  $a$ . В частности, при построении горизонтальных полей можно сначала построить поля  $H_\mu$ , инвариантные относительно структурной группы,

$$[V_a, H_\mu] = 0, \quad R_{g^{-1}}^* H_\mu R_g^* = H_\mu. \quad (3.2)$$

Тогда произвольное горизонтальное поле находится как свертка  $H = \lambda^\mu H_\mu$  базисных горизонтальных полей с произвольными гладкими функциями  $\lambda^\mu = \lambda^\mu(p) = \lambda^\mu(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m)$ .

Итак, горизонтальные направления должны быть инвариантны относительно структурной группы. Однако этим они не определяются однозначно. Если заданы каким-то способом горизонтальные



направления, согласованные со структурной группой, то говорят, что задана связность в главном расслоенном многообразии. Из сказанного выше следует, что можно задать *связность*, зафиксировав полный набор базисных горизонтальных векторных полей  $H_\mu$ . Для нас это будет наиболее удобный способ.

Для простоты будем пока предполагать, что структурная группа  $G$  есть группа всех (невырожденных) матриц определенной размерности. Тогда матричные элементы этих матриц  $g_{\alpha\beta}$  могут служить координатами на группе. А поскольку каждый слой  $\mathcal{P}_x$  в главном расслоении находится во взаимно однозначном соответствии с группой  $G$ , то матричные элементы  $g_{\alpha\beta}$  могут служить в качестве координат в расслоении, которые мы до сих пор обозначали  $y^k$ . Теперь нужно в этих координатах выразить фундаментальные векторные поля (вертикальные).

Как было сказано в предыдущем параграфе, структурная группа действует на каждом слое как правый сдвиг. Как выразить правый сдвиг с помощью координат  $g_{\alpha\beta}$ ? Нетрудно проверить, что операторы вида

$$R_g^* = e^{\chi^a D_a^{(R)}} \quad (3.3)$$

есть операторы правого сдвига, если  $D_a = \{D_{a\alpha\beta}\}$  — генераторы группы (базис алгебры Ли), и

$$D_a^{(R)} = D_{a\alpha\beta} g_{\gamma\alpha} \frac{\partial}{\partial g_{\gamma\beta}}. \quad (3.4)$$

Действительно, можно непосредственно убедиться, коммутируя дифференциальные операторы, что операторы  $D_a^{(R)}$  обладают теми же коммутационными соотношениями, что и операторы  $D_a$ , т. е. образуют *базис алгебры Ли* (являющейся представлением алгебры  $\text{Alg } G$ ). Следовательно, операторы  $R_g^*$  образуют представление группы  $G$ , если положить

$$g = e^{\chi^a D_a}.$$

Теперь достаточно убедиться, что операторы  $R_g^*$  действуют как правые сдвиги для элементов  $g$ , бесконечно близких к единице. Но в этом случае, с точностью до первого порядка по  $\delta\chi^a$ , имеем

$$(1 + \delta\chi^a D_a^{(R)}) \psi(x^\mu, g_{\gamma\beta}) = \psi(x^\mu, g_{\gamma\beta} + g_{\gamma\alpha} \chi^a D_{a\alpha\beta}).$$

Отсюда можно заключить, что и для произвольных  $\chi^a$  выполняется

$$(e^{\chi^a D_a^{(R)}} \psi)(x, g) = \psi(x, g e^{\chi^a D_a}). \quad (3.5)$$

Таким образом, мы показали, что если матричные элементы группы  $G$  выбрать в качестве «вертикальных» координат, то векторные поля  $D_a^{(R)}$ , определяемые формулой (3.4), являются фундаментальными, т. е. экспоненты от них порождают преобразования из структурной группы. Теперь нам нужно построить набор векторных полей  $H_\mu$ , который коммутировал бы с фундамен-

тальными полями  $D_a^{(R)}$ . Ясно, что любое поле (в многообразии  $\mathcal{S}^0$ ) вида  $H_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  (т. е. дифференциальный оператор весьма специального вида) коммутирует с фундаментальными полями. Однако можно попытаться добавить к нему члены, содержащие производные по вертикальным координатам  $g_{\alpha\beta}$  так, чтобы коммутация не нарушалась. Чтобы найти такие члены, можно воспользоваться тем очевидным обстоятельством, что правые сдвиги на группе  $g' \mapsto g'g$  коммутируют с левыми сдвигами  $g' \mapsto g^{-1}g'$ . Следовательно, если мы построим векторные поля, порождающие левые сдвиги, то они будут коммутировать с фундаментальными полями, порождающими правые сдвиги. Искомые поля строятся по аналогии с (3.4) и имеют вид

$$D_a^{(L)} = -D_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial g_{\alpha\gamma}}. \quad (3.6)$$

Нетрудно убедиться непосредственно, что эти поля 1) образуют представление базиса алгебры Ли  $D_a$ ; 2) генерируют левые сдвиги на группе и, следовательно, на слое расслоения; 3) коммутируют с фундаментальными полями  $D_a^{(R)}$ .

Искомый набор полей, коммутирующих с фундаментальными, строится теперь очень просто. Это есть

$$H_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - iA_\mu^a(x) D_a^{(L)}. \quad (3.7)$$

Коэффициенты  $A_\mu^a$  в этом выражении могут быть произвольными функциями от координат  $x^\mu$ , но не могут зависеть от вертикальных координат  $g_{\alpha\beta}$ , так как иначе нарушилось бы условие коммутации

$$[D_a^{(R)}, H_\mu] = 0. \quad (3.8)$$

Векторные поля  $H_\mu$  (вместе со всеми их линейными комбинациями) определяют поле направлений в расслоении  $\mathcal{S}$ , которое остается инвариантным при действии структурной группы. Следовательно, такие поля можно принять за *горизонтальные* и тем самым задать связность в расслоении. Горизонтальные поля  $H_\mu$  будем называть *базисными*.

Мы пришли к тому, что связность в расслоении со структурной группой  $G$  задается набором функций  $A_\mu^a(x)$  ( $a$  пробегает число значений, равных числу параметров группы) или функциями

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x) D_a^{(L)}, \quad (3.9)$$

значения которых — не числа, а дифференциальные операторы. Более точно,  $A_\mu$  — это вертикальные векторные поля на  $\mathcal{S}^0$ , инвариантные относительно действия структурной группы. Набор функций  $A_\mu^a(x)$  определяет калибровочное поле (см. (1.8)), которое таким образом получает геометрическую интерпретацию.

До сих пор мы рассматривали случай, когда группа  $G$  есть группа всех невырожденных матриц определенной размерности,



и поэтому матричные элементы  $g_{\alpha\beta}$  могут служить координатами на группе, а значит, и вертикальными координатами на расслоении. В общем случае это не так. Правда, практически всегда группу можно реализовать как группу матриц определенной размерности, однако не любых матриц, а подчиняющихся некоторым дополнительным условиям (например,  $SO(3)$  — группа 3-мерных матриц с дополнительными условиями: ортогональность и единственный детерминант). В таких случаях матричные элементы не могут служить координатами в группе и в интересующем нас расслоении. Связность в расслоении по-прежнему можно строить по формуле (3.7), где  $D_a^{(L)}$  — вертикальные векторные поля на расслоении, инвариантные относительно структурной группы. Если воспользоваться тривиализацией расслоения, то вертикальные поля на нем сводятся к полям на группе  $G$ . Значит,  $D_a^{(L)}$  можно рассматривать как векторные поля на группе  $G$ , инвариантные относительно правого сдвига. По-прежнему можно требовать, чтобы выполнялись коммутационные соотношения

$$[D_a^{(L)}, D_b^{(L)}] = f_a^c D_c^{(L)},$$

т. е.  $D_a^{(L)}$  были набором правоинвариантных векторных полей на группе, образующих представление ее алгебры Ли.

Практически, однако, даже конкретную форму правоинвариантных векторных полей (3.6) (а также и (3.4) для фундаментальных полей) можно использовать в самом общем случае. Для этого достаточно интересующую нас группу  $G$  реализовать как группу матриц, на которые наложены дополнительные условия, и рассмотреть более широкую группу матриц без дополнительных условий. В этой более широкой группе матричные элементы  $g_{\alpha\beta}$  уже могут служить координатами, и мы можем построить правоинвариантные векторные поля на расширенной группе по формуле (3.6). Следует позаботиться лишь о том, чтобы эти векторные поля были касательными не только к расширенной группе, но и к интересующей нас подгруппе. Для этого достаточно выбрать в качестве матриц  $D_a$ , фигурирующих в определении (3.6), генераторы интересующей нас подгруппы  $G$  (базис ее алгебры Ли).


Те же замечания относятся и к расслоению со структурной группой  $G$ . Если матричные элементы  $g_{\alpha\beta}$ ,  $g \in G$ , не могут служить вертикальными координатами в расслоении  $\mathcal{P}$  (из-за дополнительных условий, делающих их зависимыми), то мы переходим к более широкому расслоению, расширяя структурную группу. Переход осуществляется просто снятием дополнительных условий на матричные элементы. В новом расслоении матричные элементы уже могут служить координатами, и мы строим правоинвариантные векторные поля по формулам (3.6). Если позаботиться о том, чтобы  $D_a$  в этом определении были не производными матрицами, а генераторами интересующей нас группы  $G$ , то поля (3.6) можно рассматривать не только как поля в расширенном рас-



слоении, но и как поля в расслоении  $\mathcal{P}$  (они не выводят за пределы этого расслоения).

Итак, мы знаем теперь, как задать в главном расслоенном многообразии связность. Это можно сделать, например, задав функции  $A_\mu^a(x)$  и тем самым фиксируя набор горизонтальных базисных полей  $H_\mu$  по формуле (3.7). Тогда в каждой точке  $p \in \mathcal{P}$  определяется набор из  $n$  независимых горизонтальных векторов. Линейная оболочка этих векторов образует *горизонтальное подпространство* касательного пространства к многообразию  $\mathcal{P}$  в точке  $p$ . Точно так же набор фундаментальных полей  $D_a^{(R)}$  определяет в каждой точке набор вертикальных векторов, на которые натягивается *вертикальное подпространство* касательного пространства. Горизонтальное и вертикальное подпространства являются дополнительными друг к другу (т. е. не имеют общих векторов, кроме нулевого), а их сумма совпадает со всем касательным пространством. Это значит, что любой касательный вектор к многообразию  $\mathcal{P}$  в точке  $p$  единственным образом может быть представлен в виде суммы горизонтального и вертикального векторов в этой точке.

Имея в своем распоряжении горизонтальные подпространства в каждой точке, мы можем осуществлять лифт векторов, векторных полей и кривых с базы в расслоение. Это операция, в некотором смысле обратная по отношению к проектированию. Если задан вектор  $\bar{A}_p$ , касательный к расслоению  $\mathcal{P}$  в точке  $p$ , то с помощью проекции  $\pi$  мы однозначно сопоставляем ему вектор  $A_x$ , касательный к  $\mathcal{X}$  в точке  $x = \pi(p)$ . Обратная операция не может быть однозначной: существует много векторов, проектирующихся на один и тот же вектор в базе. Однако если мы потребуем, чтобы вектор в расслоении  $\bar{A}_p$  был горизонтальным, то он единственным образом определяется по своей проекции  $A_x$  и называется *лифтом вектора*  $A_x$ .

Лифт векторного поля можно определить на основе лифта векторов. Действительно, векторное поле  $A$  в  $\mathcal{X}$  означает задание в каждой точке  $x \in \mathcal{X}$  вектора, касательного к  $\mathcal{X}$ . Поднимая все эти векторы в расслоении, мы получим векторное поле  $\bar{A}$  в расслоении  $\mathcal{P}$ . Оно и называется *лифтом векторного поля*  $A$ . Однако для векторных полей мы можем определить эту операцию явным образом, используя базисные векторные поля  $H_\mu$ . Если векторное поле в базе имеет вид  $A = A^\mu(x) \partial/\partial x^\mu$ , то его лифт в расслоение есть векторное поле  $\bar{A} = A^\mu(x) H_\mu$ . Ясно, что этой же формулой мы можем пользоваться и для лифта вектора в данной точке.  Наконец, последнее и самое важное понятие, связанное с горизонтальными векторами, — это лифт кривой и параллельный перенос. Если задана кривая в расслоении  $\tau \mapsto p(\tau)$ , то, проектируя каждую точку этой кривой на базу, мы получим проекцию кривой  $x(\tau) = \pi(p(\tau))$ . Обратная операция, конечно, неоднозначна: существует много кривых, проектирующихся на единствен-

ную кривую в базе. Однако если мы потребуем, чтобы кривая в расслоении была в каждой точке горизонтальна (т. е. касательный вектор к этой кривой был горизонтальным вектором расслоения), то кривая в расслоении однозначно определяется кривой в базе и своей начальной точкой. Таким образом, если имеется точка  $p \in \mathcal{P}$ , ее проекция  $x = \pi(p)$  и непрерывная кривая  $x(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$ , начинающаяся в  $x$  (так что  $x(0) = x$ ), то единственным образом определяется горизонтальная кривая в расслоении,  $p(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$ , начинающаяся в точке  $p$  (так что

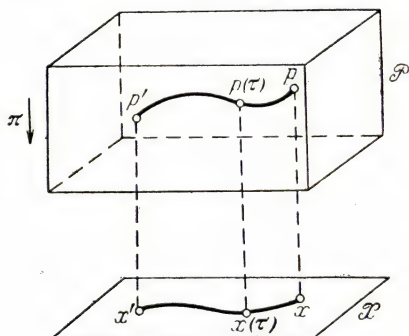


Рис. 9.

$p(0) = p$ ) и проектирующаяся на заданную кривую в базе,  $\pi(p(\tau)) = x(\tau)$ . Кривая в расслоении называется *лифтом* кривой  $x(\tau)$ . При этом конечная точка кривой в расслоении,  $p' = p(1)$ , называется результатом параллельного переноса точки  $p$  вдоль кривой  $x(\tau)$  (рис. 9).

Лифт кривой определяется условием, чтобы кривая в расслоении была в каждой своей точке горизонтальна. Это значит, что касательный вектор к такой кривой должен разла-

гаться по векторам  $H_\mu$  вида (3.7). Отсюда можно вывести уравнение для горизонтальной кривой. Если она задана в координатах  $p(\tau) = (x^\mu(\tau), g_{\alpha\beta}(\tau))$ , то функция  $x^\mu(\tau)$  описывает кривую на базе, а функция  $g_{\alpha\beta}(\tau)$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{g}_{\alpha\beta}(\tau) - i\dot{x}^\mu(\tau) A_\mu^\alpha(x(\tau)) D_{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta}(\tau) = 0,$$

или, в матричном виде,

$$\dot{g}(\tau) - i\dot{x}^\mu(\tau) A_\mu(x(\tau)) D_a g(\tau) = 0. \quad (3.10)$$

Здесь следует повторить замечание, сделанное выше: если матричные элементы  $g_{\alpha\beta}$  не могут служить координатами в  $\mathcal{P}$  из-за наложенных на них дополнительных условий, то следует перейти к более широкому расслоению, сняв эти условия, и в нем решить уравнение (3.10). При этом если начальная точка кривой лежит в  $\mathcal{P}$ , то и вся кривая автоматически оказывается в  $\mathcal{P}$ , так что выход за пределы интересующего нас расслоения является просто вспомогательным приемом. Это тот случай, когда координаты в более широком расслоении вводятся проще, чем в том, которое нас непосредственно интересует.

Решение уравнения (3.10) можно записать в виде так называемой *упорядоченной экспоненты*:

$$g(\tau) = P \exp \left( i \int_0^\tau d\tau' \dot{x}^\mu(\tau') A_\mu^\alpha(x(\tau')) D_\alpha \right) g(0). \quad (3.11)$$



Здесь использовано обозначение

$$P \exp \int_0^{\tau} d\tau' B(\tau') = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{\Delta\tau B(\tau_N)} e^{\Delta\tau B(\tau_{N-1})} \dots e^{\Delta\tau B(\tau_1)}, \quad (3.12)$$

где  $B(\tau)$  — любая (достаточно гладкая) операторнозначная функция,  $\Delta\tau = \tau/N$  и  $\tau_n = n\Delta\tau$ . Упорядоченные экспоненты будут играть в следующих параграфах ключевую роль. В физическую литературу метод упорядоченных экспонент был введен Р. Фейнманом [9]. В квантовой электродинамике упорядочение производилось по времени, в связи с чем использовался термин *T* — *экспонента*. В калибровочной теории необходимо упорядочение вдоль пути и говорят о *P* — *экспоненте*.

Таким образом, мы показали, как можно интерпретировать калибровочное поле  $A_\mu^a(x)$  геометрически. Оно, оказывается, определяет связность в главном расслоенном многообразии. Чтобы описать заряженные частицы во внешнем калибровочном поле, вводят обычно так называемое присоединенное расслоенное многообразие. Эта конструкция будет описана в Приложении Б. Однако на наш взгляд проще (и для физиков нагляднее) рассматривать заряженные частицы как функции на главном расслоенном многообразии. При таком подходе цепочка, приводящая к нужному физическому понятию — заряженной частицы, становится короче. Этот подход сформулирован в § 4.

#### § 4. Состояния заряженных частиц как функции на главном расслоении

Мы выяснили, что калибровочное поле можно описывать как связность в главном расслоенном многообразии. Состояния заряженных (т. е. обладающих «калибровочными зарядами») частиц во внешнем калибровочном поле можно ввести как сечения так называемого присоединенного расслоенного многообразия. Этот формализм будет изложен в Приложении Б. Оказывается, однако, что связность присоединенного расслоения целиком определяется связностью в главном расслоении. Этот факт, а также весь формализм присоединенного расслоения показывает, что оно играет второстепенную, вспомогательную роль в теории. На самом деле состояния заряженных частиц можно описать как функции на главном расслоенном многообразии. В работе [170] этот способ был применен для описания частиц со спином во внешнем гравитационном поле (которое можно рассматривать как калибровочное поле над искривленным пространством-временем). Здесь мы изложим этот способ для произвольного калибровочного поля.

Пусть  $\mathcal{P}(\mathcal{X}, G, \pi)$  — главное расслоенное многообразие над  $\mathcal{X}$  и  $U(G)$  — представление группы  $G$  в линейном пространстве  $\mathcal{L}$  (в интересующих нас приложениях  $\mathcal{L}$  будет конечномерным пространством). Рассмотрим функции на расслоении со значениями



в пространстве  $\mathcal{L}$ , т. е. отображения  $\psi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}$ . Будем рассматривать не любые функции этого типа, а лишь те, которые удовлетворяют дополнительному условию

$$\psi(pg) = U(g^{-1})\psi(p). \quad (4.1)$$

для любой точки  $p \in \mathcal{P}$  и любого элемента группы  $g \in G$ . Левая часть этого равенства имеет смысл потому, что группа  $G$  действует на расслоении  $\mathcal{P}$  справа как структурная группа:  $R_g: p \mapsto pg$ . Правая часть имеет смысл потому, что  $\psi(p)$  есть вектор из  $\mathcal{L}$ , а оператор  $U(g^{-1})$  действует именно в этом пространстве. Условие (4.1) будем называть *структурным условием*. Все функции  $\psi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}$ , удовлетворяющие структурному условию, образуют пространство  $\mathcal{H}$ . Это пространство (а точнее — его подпространство, определяемое уравнением движения) интерпретируется как пространство состояний калибровочно заряженной частицы во внешнем калибровочном поле. При этом калибровочное поле определяется связностью в расслоении  $\mathcal{P}$ , т. е. в конце концов набором горизонтальных векторных полей  $H_\mu$  или, что то же, набором полей  $A_\mu^a(x)$  (см. (3.7)). «Калибровочный заряд» частицы определяется представлением  $U(G)$ .

**З а м е ч а н и е.** Название «калибровочный заряд» является условным и употребляется исключительно для удобства, чтобы подчеркнуть аналогию с электродинамикой. Это название каждый раз можно понимать как синоним представления  $U(G)$ . В электродинамике задание представления сводилось к заданию одного числа  $e$ .

Пусть  $\langle, \rangle$  — эрмитово невырожденное внутреннее произведение в пространстве  $\mathcal{L}$ , инвариантное относительно представления  $U(G)$ ,

$$\langle U(g)f, U(g)f' \rangle = \langle f, f' \rangle, \quad \forall g \in G, f, f' \in \mathcal{L}.$$

Если группа  $G$  компактна, то произведение  $\langle, \rangle$  в конечномерном пространстве  $\mathcal{L}$  положительно определено и представление  $U(G)$  унитарно. В этом случае можно называть внутреннее произведение  $\langle, \rangle$  скалярным произведением. В случае некомпактной группы  $G$  произведение  $\langle, \rangle$  не является положительно определенным и представление  $U$ , относительно которого оно инвариантно, следует назвать псевдоунитарным. Мы, однако, для простоты часто будем называть форму  $\langle, \rangle$  скалярным произведением в пространстве  $\mathcal{L}$ , а представление  $U(G)$  унитарным.

Наличие инвариантного скалярного произведения в  $\mathcal{L}$  позволяет определить скалярное произведение в пространстве  $\mathcal{H}$ . Если группа  $G$  компактна, то его можно выразить в виде интеграла по расслоению

$$(\psi, \psi') = \int_{\mathcal{P}} dp \langle \psi(p), \psi'(p) \rangle$$

по некоторой мере  $dp$ , инвариантной относительно структурной группы. В общем случае (независимо от того, компактна или не компактна группа  $G$ ) можно определить скалярное произведение с помощью произвольного сечения расслоения  $\sigma: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$ . (Напомним, что сечение — это выбор по одному элементу  $\sigma(x) \in \mathcal{S}_x$  в каждом слое расслоения. В данном случае мы не накладываем на сечение условия гладкости, поэтому оно может существовать на всем  $\mathcal{X}$  даже в том случае, если расслоение нетривиально.) Через это сечение скалярное произведение выражается в виде интеграла по базе:

$$(\psi, \psi') = \int_{\mathcal{X}} dx \langle \psi(\sigma(x)), \psi'(\sigma(x)) \rangle. \quad (4.2)$$

Мера  $dx$  в этом интеграле может быть любой. В физических приложениях, когда  $\mathcal{X}$  — пространство-время, эта мера выбирается из физических соображений. Обычно на пространстве-времени задана риманова метрика  $g_{\mu\nu}(x)$ . В этом случае выбирается  $dx = \sqrt{-\det[g_{\mu\nu}]} d^4x$ . В частности, в пространстве Минковского это дает просто  $dx = d^4x$ . Что касается выбора сечения  $\sigma$ , то от него интеграл (4.2) не зависит. Действительно, переход к другому сечению означает сдвиг каждого  $\sigma(x)$  вдоль слоя. Этот сдвиг можно записать в виде  $\sigma'(x) = \sigma(x)g_x$ , где  $g_x \in G$  — элемент группы, зависящий от точки  $x$ . Но тогда из структурного условия (4.1) и инвариантности произведения  $\langle, \rangle$  следует, что подынтегральное выражение в (4.2) не меняется при переходе к другому сечению расслоения.

**З а м е ч а н и е.** Для того чтобы интеграл (4.2) существовал, в пространство  $\mathcal{H}$  следует включать не все функции, удовлетворяющие структурному условию, а лишь интегрируемые с квадратом

$$(\psi, \psi) = \int dx \langle \psi_{\pm}^{\dagger}(\sigma(x)), \psi(\sigma(x)) \rangle < \infty.$$

Тогда скалярное произведение (4.2) определяет на  $\mathcal{H}$  *предгильбертову структуру* и после пополнения по норме  $\mathcal{H}$  превращается в *гильбертово пространство*. Однако такого рода математические детали, относящиеся к области функционального анализа, мы будем систематически опускать, тем более, что они стали уже привычными для большинства физиков-теоретиков (см. по этому поводу, например, [6, 21, 23]). Более детально мы будем обсуждать алгебраические аспекты излагаемой теории.

Таким образом, в описываемом сейчас формализме заряженные частицы описываются не функциями на пространстве-времени  $\mathcal{X}$ , а функциями на расслоении  $\mathcal{S}$ . При этом частицы с разными «зарядами», т. е. соответствующие разным представлениям  $U(G)$ , описываются функциями в одном и том же универсальном пространстве  $\mathcal{S}$ , а отличаются только видом структурного условия (4.1). В соответствии с этим и операторы, играющие роль



ковариантных производных в этом формализме, также универсальны. Для частиц с любыми зарядами эти операторы совпадают с  $H_\mu$  — горизонтальными полями в главном расслоении (3.7).

Однако на такой области  $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ , на которой главное расслоение тривиализуется, можно от функций на  $\mathcal{S}$  перейти к более привычным для физиков функциям на  $\mathcal{X}$ . Действительно, в этом случае точка  $p \in \pi^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{S}$  представляется парой  $p=(x, g)$ , где  $x=\pi(p) \in \mathcal{U}$ ,  $g \in G$  (см. § 2). Поэтому функция  $\psi(p)$ , описывающая заряженную частицу, сводится к функции  $\psi(x, g)$  на произведении  $\mathcal{U} \times G$ . При этом в силу структурного условия (4.1) зависимость от второго аргумента заранее известна:

$$\psi(x, g'g) = U(g^{-1})\psi(x, g').$$

С помощью этой формы структурного условия от второго аргумента можно вообще избавиться и перейти к функциям от одного аргумента  $x$ . Обозначая эти функции той же буквой, положим  $\psi(x) = \psi(x, 1)$ . Тогда

$$\psi(x, g) = U(g^{-1})\psi(x). \quad (4.3)$$

Применим теперь к функции  $\psi(x, g)$  в точке  $g=1$  горизонтальное векторное поле  $H_\mu$ , определенное формулой (3.7). Первое слагаемое в этой формуле  $\partial/\partial x^\mu$  представляет собой дифференцирование по координатам базы. Оно останется без изменения. Второе слагаемое в формуле (3.7) —  $iA_\mu^a D_a^{(L)}$  — это вертикальное векторное поле в расслоении  $\mathcal{S}$ . Для функции  $\psi(x, g)$  вертикальный сдвиг означает изменение аргумента  $g$ . При этом  $\psi(x) = \psi(x, 1)$  переходит в  $\psi(x, g)$  с  $g \neq 1$ , что можно выразить опять через  $\psi(x)$  с помощью (4.3). Поэтому под действием вертикального сдвига функция  $\psi(x)$  преобразуется по представлению  $U(G)$ . Следовательно, в применении к функции  $\psi(x)$  оператор  $D_a^{(L)}$  в свертке  $A_\mu^a D_a^{(L)}$  можно заменить на генератор  $T_a$  представления  $U$ . В результате получаем

$$H_\mu \psi(x, g)|_{g=1} = \nabla_\mu \psi(x), \quad \forall \psi \in \mathcal{H}, \quad (4.4)$$

где

$$\nabla_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - iA_\mu^a T_a, \quad (4.5)$$

а генераторы  $T_a$  определены формулой

$$U(e^{\chi^a D_a}) = e^{\chi^a T_a}. \quad (4.6)$$

Формально можно вывести равенство (4.4), если применить к функции  $\psi \in \mathcal{H}$  оператор бесконечно малого горизонтального сдвига,  $R^*(\delta x) = 1 + \delta x^\mu H_\mu$ . В результате действия этого оператора мы получим функцию со сдвинутым аргументом. Если использовать координаты  $p=(x^\mu, g_{a\beta})$  в расслоении  $\mathcal{S}$ , то

$$R^*(\delta x)\psi(x, g) = \psi(x + \delta x, g + i\delta x^\mu A_\mu^a D_a g).$$



Полагая здесь  $g=1$ , используя (4.3) и (4.6), получим

$$R^*(\delta x)\psi(x, g)|_{g=1} = (1 - i\delta x^a A_\mu^a T_a)\psi(x + \delta x).$$

Отсюда и следует формула (4.4).

Таким образом, действие горизонтального векторного поля  $H_\mu$  на функцию в расслоении  $\psi(x, g)$  индуцирует действие ковариантной производной  $\nabla_\mu$  на функцию  $\psi(x)$ . Именно эта функция чаще всего используется в физической литературе в качестве волновой функции, описывающей состояние частицы. Однако во многих случаях удобнее пользоваться функцией  $\psi(p)$ , заданной на расслоении, а вместо ковариантной производной  $\nabla_\mu$  применять базисное векторное поле, т. е. дифференциальный оператор  $H_\mu$ .

Еще один эквивалентный формализм состоит в том, чтобы описывать состояние частицы как сечение присоединенного расслоенного пространства. Он будет описан в Приложении Б.

Подведем некоторые итоги. Мы добились того, что ковариантная производная  $\nabla_\mu$  точно в том виде, в каком она фигурирует в калибровочной теории, получена в контексте геометрии расслоений. Правда, цепочка рассуждений, приводящая к ковариантной производной, оказалась довольно длинной, и существенно сократить ее нельзя. Однако в результате мы получили довольно полезный результат — интерпретацию калибровочных полей как связностей в расслоенных многообразиях. Продолжая анализ дальше, можно было бы показать, что напряженность калибровочного поля (1.5) — это не что иное как *форма кривизны данной связности*. И вообще к калибровочной теории можно применять мощный аппарат, разработанный математиками для изучения связностей. Он оказывается полезным для корректного изучения геометрии в целом. Дело в том, что пока мы изучаем явления, которые могут быть описаны в достаточно малой окрестности (локальные явления), все расслоения можно считать тривиальными. В этом случае применять мощную математическую технику — это все равно что стрелять из пушки по воробьям. Зато в случае, если изучаются явления, происходящие в больших областях, и расслоения в этих областях уже нельзя считать тривиальными, тогда без тонких математических инструментов обойтись уже трудно. В связи с этим стоит заметить, что вышеприведенное изложение геометрии расслоенных пространств не является вполне строгим. Некоторые существенные детали, большей частью касающиеся сшивания разных координатных окрестностей, были опущены. Поэтому читатель, который захочет применить этот аппарат к изучению глобальных явлений, должен будет изучить математическую технику более внимательно, пользуясь специальной математической литературой (например, [26—28]). Однако приведенное здесь изложение, проведенное на физическом уровне, все же, можно надеяться, будет полезным для первого знакомства с предметом. Без такого введения подступиться к математической литературе часто бывает трудно.

Впрочем, со следующей главы мы начнем развивать для калибровочной теории новый формализм, основанный на группе путей. Он также позволяет решать глобальные проблемы. Более того, на наш взгляд, он позволяет более глубоко проникнуть в эти проблемы и в частности изучить взаимосвязь локальных и глобальных аспектов теории элементарных частиц и полей. В то же время этот групповой подход в сущности проще, чем изложенный здесь геометрический, хотя, надо признаться, что совсем простым его не назовешь. Одно преимущество этого подхода не подлежит никакому сомнению: он более тесно связан с традиционным формализмом квантовой теории, в котором широко используются группы, и проливает новый свет на симметрию пространства-времени.

## Глава 6

### ГРУППА ПУТЕЙ И ЛОКАЛЬНЫЕ (КИНЕМАТИЧЕСКИЕ) СВОЙСТВА ЧАСТИЦ В КАЛИБРОВОЧНОМ ПОЛЕ

В предыдущей главе мы познакомились с идеей калибровочной инвариантности и калибровочного поля, а также с геометрической интерпретацией калибровочного поля. Теперь мы подойдем к той же теории с совершенно новой точки зрения. Можно сказать, что предлагаемый подход сводит геометрию к алгебре. В основе его лежит попытка так обобщить группу трансляций, чтобы ее можно было применять не только для частиц в пустом пространстве-времени, но и для частиц в силовом поле. Оказывается, это возможно. Для этого следует группу трансляций заменить на группу путей, т. е. характеризовать элемент группы не только тем, на какой вектор происходит трансляция, но и вдоль какого пути она происходит. Интересным является уже то, что пути (скажем, в пространстве Минковского) можно определить таким образом, чтобы они образовывали группу. Но еще более интересно, что рассматривая некоторые представления этой группы мы последовательно получаем те математические объекты, которые используются в калибровочной теории и которые обычно интерпретируются как характеристики некоторой геометрии. Таким образом, геометрия возникает как представление группы путей.

Геометрия не будет для нас главной целью, и мы даже не будем каждый раз подчеркивать связь возникающих алгебраических структур с соответствующими структурами в геометрии. Логика всех построений будет основана на стремлении получить описание движения элементарной частицы. И в данной главе мы будем исходить при этом из двух требований: 1) частица должна описываться представлением группы путей; 2) частица должна иметь пространственно-временную интерпретацию. Второе требование означает, что в теории должен иметь смысл вопрос: в какой точке пространства Минковского находится частица. Первое же требование означает, что для частицы, несмотря на наличие си-



лового поля произвольной конфигурации, пространство-время остается в определенном смысле однородным. Это требование кажется сомнительным и действительно априори его трудно обосновать (разве что чем-то вроде принципа эквивалентности). Однако к концу этой главы мы увидим, что это требование приводит тем не менее к успеху. А именно: сочетание двух сформулированных требований практически однозначно приводит к теории, которая отождествляется как теория частицы, движущейся под действием калибровочного поля. При этом и само поле, и движущаяся в нем частица описываются соответствующими представлениями группы путей.

## § 1. Определение группоида путей

Во Введении (гл. 1, § 2) было кратко продемонстрировано, как группа путей появляется в калибровочной теории. Теперь мы приступим к систематическому исследованию группы путей и ее представлений, имеющих отношение к калибровочной теории. Начнем с определения группы путей. В части II нам понадобится группа путей в пространстве Минковского, но определение группы путей будет сформулировано для произвольного аффинного пространства.



Рис. 10.

Определение состоит в том, что рассматривается множество непрерывных кривых, а затем с помощью ряда отождествлений производится переход к классам кривых, которые уже образуют группу и называются путями. Можно производить отождествления в той или иной последовательности, это вопрос удобства. Получающиеся при этом определения эквивалентны. Мы используем здесь наиболее простую процедуру определения группы путей.

Рассмотрим множество  $P''$  непрерывных кусочно дифференцируемых кривых на дифференцируемом многообразии  $\mathcal{M}$ . Будем параметризовать эти кривые отрезком  $[0, 1]$ , так что кривая есть  $\{\xi\} = \{\xi(\tau) \in \mathcal{M} \mid 0 \leq \tau \leq 1\}$ . Можно определить произведение двух кривых как кривую, которая получается, если последовательно пройти сначала вдоль первой кривой, а затем вдоль второй (рис. 10). Более конкретно,  $\{\xi''\} = \{\xi'\} \{\xi\}$ , если

$$\xi'(\tau) = \begin{cases} \xi(2\tau) & \text{при } 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}, \\ \xi'(2\tau - 1) & \text{при } \frac{1}{2} \leq \tau \leq 1. \end{cases} \quad (1.1)$$

Однако новая кривая будет непрерывной (т. е. будет принадлежать  $P''$ ) лишь в том случае, если  $\xi(1) = \xi'(0)$ , т. е. конец первой кривой совпадает с началом второй. Таким образом, произведение определено не для всех кривых, а лишь для кривых, со-



гласованных друг с другом в этом смысле. Операцию обращения естественно определить как прохождение той же кривой в обратном направлении. Значит, в качестве  $\{\xi\}^{-1} = \{\xi'\}$  можно взять кривую  $\xi'(\tau) = \xi(1 - \tau)$ .

Введенные таким образом определения умножения и обращения лишь по названию похожи на групповые операции. Групповые аксиомы в  $P''$  не выполняются. Кроме того, определения операций явно являются произвольными (например, для умножения можно вместо (1.1) принять другое правило, разделив отрезок  $[0, 1]$  не пополам, а на две неравные части). Мы устраним этот недостаток и несколько приблизимся к групповой структуре, если избавимся от параметризации. (Действительно, произвол в определении операций связан с возможностью описать одну и ту же кривую с помощью различных параметризаций.)

Назовем две кривые эквивалентными,  $\{\xi\} \sim \{\xi'\}$ , если они могут быть получены друг из друга изменением параметризации, т. е. если существует такое непрерывное кусочно дифференцируемое монотонное отображение  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ , при котором  $\xi'(\tau) = \xi(f(\tau))$ . Факторизуем множество непрерывных кривых  $P''$  по этому отношению эквивалентности, т. е. перейдем к множеству  $P' = P''/\sim$ , каждым элементом которого является класс эквивалентных кривых. Умножение в  $P'$  определяется умножением в  $P''$ . Другими словами, чтобы перемножить два класса эквивалентности, нужно перемножить составляющие их кривые (можно показать, что произведения кривых опять образуют класс эквивалентности). Теперь уже умножение оказывается ассоциативным, т. е. мы несколько приблизились к групповой структуре. Однако умножение определено еще не для всех пар элементов из  $P'$ , а обращение, индуцированное из операции обращения кривой,  $\xi'(\tau) = \xi(1 - \tau)$ , не удовлетворяет групповым аксиомам.

Обозначим класс эквивалентности кривых, т. е. элемент из  $P'$ , через  $(\xi)$ . Тогда произведение  $(\xi'') = (\xi')(\xi)$  определяется перемножением всех кривых, входящих в классы  $(\xi)$ ,  $(\xi')$ , по формуле (1.1). Обращение  $(\xi') = (\xi)^{-1}$  определяется обращением каждой кривой, входящей в класс  $(\xi)$ , по формуле  $\xi'(\tau) = \xi(1 - \tau)$ . Трудность, однако, состоит в том, что элемент  $(\xi)^{-1}(\xi)$  не обладает свойствами, характерными для единицы. Действительно, произведение  $(\xi)^{-1}(\xi)(\xi')$  не равно  $(\xi')$ . Но это подсказывает, какое отождествление следует произвести, чтобы ликвидировать этот дефект.

Введем на множестве  $P'$  отношение эквивалентности, полагая, что

$$\begin{aligned} (\xi)^{-1}(\xi) &\sim (\xi'), \quad \xi'(\tau) \equiv \xi(0); \\ (\xi_1)(\xi)^{-1}(\xi) &\sim (\xi)^{-1}(\xi)(\xi_1) \sim (\xi_1); \\ (\xi_1)(\xi)^{-1}(\xi)(\xi_2) &\sim (\xi_1)(\xi_2). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Другими словами, примем, что включение в любую кривую «аппендикса» вида  $(\xi)^{-1}(\xi)$  или выбрасывание такого аппендикса

меняет кривую на эквивалентную (точнее следует говорить о классе кривых). Каждый «аппендикс»  $(\xi)^{-1}(\xi)$  представляет собой некоторую кривую  $(\xi)$ , проходящую сначала в одном направлении и сразу вслед за этим — в противоположном (рис. 11). Однако этого мало. Если одна кривая может быть переведена в другую с помощью последовательности операций, каждая из которых заключается во включении или выбрасывании «аппендикса», то такие кривые также следует считать эквивалентными\*).

Факторизация  $\hat{P} = P' / \sim$  дает множество, в котором операция обращения удовлетворяет групповым аксиомам. Это множество

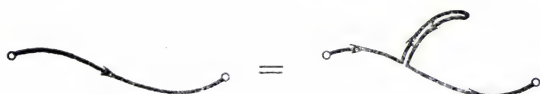


Рис. 11.

обладает структурой группоида. Поясним сказанное. Каждый элемент множества  $\hat{P}$  можно рассматривать как класс кривых, отличающихся лишь параметризацией и включением «аппендиксов». Кривые, принадлежащие одному классу, имеют общее начало  $\xi(0) = x$  и общий конец  $\xi(1) = x'$ . Поэтому каждый такой класс можно обозначить  $[\xi]_x^{x'}$  (индексы  $x, x'$  не являются необходимыми, но удобными). Произведение двух классов определяется как совокупность произведений составляющих их кривых. Поэтому произведение

$$[\xi']_{x_1}^{x_2'} = [\xi']_{x_1}^{x_2'} [\xi]_{x_1}^{x_2}$$

имеет смысл лишь при  $x_1' = x_2$  и в этом случае определяется формулой (1.1) и обладает свойством ассоциативности. Операция обращения определяется как класс  $([\xi]_x^{x'})^{-1} = [\xi']_x^x$ , состоящий из кривых  $\xi'(\tau) = \xi(1 - \tau)$ . Класс  $1_x^x$ , содержащий постоянную кривую  $\xi(\tau) = x = \text{const}$ , играет роль единицы в том смысле, что выполняются соотношения

$$1_{x'}^{x'} [\xi]_x^{x'} = [\xi]_x^{x'} 1_x^x = [\xi]_x^{x'},$$

$$([\xi]_x^{x'})^{-1} [\xi]_x^{x'} = 1_x^x, \quad [\xi]_x^{x'} ([\xi]_x^{x'})^{-1} = 1_{x'}^{x'}.$$

Алгебраическая система, обладающая такого рода свойствами, называется группоидом [43]. Следовательно, полученное нами множество  $\hat{P}$  классов кривых является группоидом.

Определенный только что группоид путей  $\hat{P}$  в дальнейшем нам понадобится лишь как вспомогательное средство, позволяю-

\*) Другими словами, отношение эквивалентности  $\sim$  определяется как минимальное (в смысле упорядочения отношений, см., напр., [37]), рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение, относительно которого справедливо (1.2).



щее упростить некоторые формулы. Элемент этого группоида  $[\xi]_x'$  — это путь с фиксированными концами. Мы же в дальнейшем определим «свободный» путь, концы которого не фиксированы. Свободные пути имеют то преимущество, что образуют группу. Однако группоид  $\hat{P}$  был подробно описан, так как для его определения не пришлось накладывать на пространство  $\mathcal{M}$  почти никаких ограничений. Пока рассматриваются пути в произвольном дифференцируемом многообразии  $\mathcal{M}$ . Для определения группы путей придется предположить, что  $\mathcal{M}$  — аффинное пространство.

Рассмотрим подмножество  $P_x'' \subset \hat{P}$ , состоящее из путей  $[\xi]_x''$  с заданными концами. Нетрудно видеть, что произведение любого пути из  $P_x'$  на любой путь из  $P_x''$  (произведение слева) определено и дает путь из  $P_x''$ . В частности, пути, принадлежащие  $P_x^x$ , можно умножать друг на друга, и при этом опять получаются пути из  $P_x^x$ . Такие пути представляют собой петли (замкнутые пути), начинающиеся и кончающиеся в точке  $x$ . Множество петель  $P_x^x$  есть группа, роль единицы в ней играет  $1_x^x$ .

Теперь нам осталось сделать один шаг, для того чтобы определить группу путей. Но для этого придется предположить, что пространство  $\mathcal{M}$  — аффинное пространство. Это будет сделано в следующем параграфе. Пути, образующие группу, отличаются от путей, образующих группоид, так же, как свободные векторы отличаются от векторов, начинающихся в определенной точке, — это свободные пути. Однако даже после определения группы свободных путей нам придется часто пользоваться путями с фиксированными концами, образующими группоид. Поэтому несколько упростим обозначения. Кроме введенного уже обозначения  $[\xi]_x' \in \hat{P}$  будем обозначать тот же объект символом  $p_x'$ . Буква  $p$  при этом напоминает о смысле величины, с которой мы имеем дело, так как происходит от английского слова path (путь). Если не требуется явно указывать оба конца пути, то вместо  $p_x^{x'}$  или  $[\xi]_x^{x'}$  будет употребляться обозначение  $p_x$ ,  $[\xi]_x$ ,  $p^{x'}$  или  $[\xi]^{x'}$ . Если начало и конец пути совпадают, т. е. путь представляет собой петлю с фиксированным началом, то мы будем употреблять обозначение  $l_x$  (от английского слова loop — петля), а для множества всех петель с данным началом — обозначение  $L_x$ . Таким образом,  $l_x$  и  $L_x$  обозначают то же самое, что соответственно  $p_x^x$  и  $P_x^x$ . Наконец, если не требуется явно указывать начало и конец пути, то мы будем употреблять обозначение  $\hat{p} \in \hat{P}$ , а для петли  $\hat{l} \in \hat{L}$ . Здесь  $\hat{L}$  — одна из групп петель  $L_x$ , только точка  $x$  не указана явно.

## § 2. Определение группы путей в аффинном пространстве

В предыдущем параграфе мы определили группоид путей с фиксированными концами в произвольном многообразии  $\mathcal{M}$ . Путь  $p_x^{x'} = [\xi]_x^{x'}$  с началом  $x \in \mathcal{M}$  и концом  $x' \in \mathcal{M}$  определился как класс непрерывных кривых в  $\mathcal{M}$ . В один класс объединялись



кривые, которые отличались лишь способом параметризации их или добавлением «аппендиксов», каждый из которых представляет собой произвольную кривую, проходимую сначала в одном направлении, а затем в обратном. Тот факт, что кривые, отличающиеся добавлением аппендиксов, помещаются в один класс эквивалентности, т. е. отождествляются, можно очень наглядно сформулировать так: прохождение кривой в обратном направлении «зачеркивает», аннулирует ее. Множество определенных таким образом классов эквивалентности было обозначено  $\hat{P}$ .

Для двух путей, из которых первый кончается там, где начинается второй, было определено произведение  $[\xi']_x'' [\xi]_x' = [\xi'']_x''$ , представляющее собой класс кривых, получающихся прохождением кривой из первого класса, а затем — кривой из второго класса. Для каждого пути обратный путь  $([\xi]_x')^{-1} = [\xi']_x$  определялся как класс тех же самых кривых, но проходимых в обратном направлении. По отношению к этим операциям множество  $\hat{P}$  путей с закрепленными концами является группоидом. Это значит, что  $\hat{P}$  отличается от группы лишь тем, что произведение определено не для любой пары элементов. Но тогда, когда произведение определено, оно подчиняется обычным групповым аксиомам. Роль единицы играет при этом класс  $1_x$  кривых, эквивалентных постоянной кривой  $\xi(\tau) \equiv x$ .

Теперь мы сделаем следующий шаг и перейдем от группоида к группе. Для этого необходимо от путей с закрепленными концами перейти к «свободным» путям. Действительно, мы не можем перемножить такие два пути, концы которых не согласованы друг с другом. Если же мы будем иметь возможность переносить путь, сдвигать его как целое, то всегда можно будет сдвинуть его таким образом, чтобы концы были согласованы. Но определить свободные пути уже нельзя в произвольном многообразии  $M$ . Для этого требуется, чтобы в  $M$  была определена операция типа операции сдвига. Мы будем предполагать, что  $M$  — аффинное пространство. В части II книги мы будем иметь дело с релятивистскими системами, и в этом случае в качестве  $M$  будет фигурировать пространство Минковского.

Напомним вкратце разницу между аффинным и линейным пространствами. Точки аффинного пространства  $x \in M$  равноправны (в отличие от линейного пространства, где нулевой вектор играет выделенную роль). Каждой паре точек  $x, x' \in M$  сопоставляется вектор из некоторого линейного пространства  $M_0$  (обозначается  $x' - x = a \in M_0$ ), а точке  $x \in M$  и вектору  $a \in M_0$  сопоставляется другая точка  $x' \in M$  (обозначается  $x' = x + a$ ). При этом между точками и векторами существуют отношения, хорошо известные из обычной евклидовой геометрии. В частности, справедливо правило треугольника для сложения векторов:  $(x' - x) + (x'' - x') = x'' - x$ .

Если выделить одну точку  $O \in M$  как начало отсчета, то каждой точке  $x \in M$  сопоставляется вектор  $x - O$  и наоборот каждому

вектору  $a \in \mathcal{M}_0$  сопоставляется точка  $x = O + a \in M$ . Поэтому структура аффинного пространства легко восстанавливается по структуре векторного пространства, и иногда их просто отождествляют. Например, пространство Минковского часто рассматривают как векторное пространство. Однако, строго говоря, пространство Минковского — это совокупность пространств точек  $M$  и пространства векторов  $\mathcal{M}_0$ . Скалярное произведение или *лоренцевская свертка*  $(a, b) = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^0 b^0 - \mathbf{a} \mathbf{b}$  определяется только для векторов (или для пар точек). Если иногда пишут  $(x, x')$  для двух точек, то при этом имеется в виду, что выделено и зафиксировано начало отсчета, так что по определению  $(x, x') = (x - O, x' - O)$ .

Пусть  $\hat{P}$  — группоид путей с закрепленными концами в аффинном пространстве  $M$ . Введем в  $\hat{P}$  отношение эквивалентности, полагая  $[\xi]_{x_1}^{x_2} \sim [\xi']_{x_1'}^{x_2'}$ , если найдется такой вектор  $a \in \mathcal{M}_0$ , что кривые, входящие в рассматриваемые два класса, связаны соотношением  $\xi'(\tau) = \xi(\tau) + a$ . Другими словами, кривые одного из классов получаются из кривых другого класса с помощью операции сдвига на вектор  $a$ . Это означает, в частности, что  $x_1' = x_1 + a$ ,  $x_2' = x_2 + a$ .

Факторизуем  $\hat{P}$  по введенному отношению эквивалентности. То, что получится,  $P = \hat{P} / \sim$ , и есть *группа путей*. Каждый элемент  $[\xi] \in P$  можно рассматривать как класс кривых, которые могут отличаться друг от друга лишь параметризацией, включением «аппендиксов», проходимых туда-обратно, а также общим сдвигом в аффинном пространстве. Произведение двух классов определяется через произведение входящих в них кривых. При этом в любых двух классах всегда найдутся такие кривые, которые можно перемножить (т. е. концы которых согласованы). Обратный класс определяется как класс, состоящий из обратных кривых. Роль единицы играет класс 1, содержащий постоянные кривые. (Кроме постоянных кривых в нем содержатся кривые, проходимые туда-обратно, а также любые их произведения.) Для определенных таким образом операций все групповые аксиомы выполняются, так что  $P$  — группа.

Элементы группы  $P$  мы будем обозначать  $p$  или  $[\xi]$ . Каждый такой элемент будет называться *путь*. Нетрудно видеть, что для всех кривых, входящих в класс  $[\xi]$ , разность  $x' - x = \xi(1) - \xi(0)$  имеет одно и то же значение. Этот вектор (из  $\mathcal{M}_0$ ) мы будем называть *вектором сдвига*, который соответствует данному пути  $[\xi] = p$ , и обозначать  $[\xi]_{\mathcal{M}}$  или  $p_{\mathcal{M}}$ . Индекс  $\mathcal{M}$  здесь напоминает, что  $p_{\mathcal{M}}$  есть вектор из  $\mathcal{M}_0$  (рис. 12).

Нетрудно видеть, что векторы сдвига складываются при перемножении путей:

$$(p'p)_{\mathcal{M}} = p'_{\mathcal{M}} + p_{\mathcal{M}}. \quad (2.1)$$

Следовательно, отображение  $p \mapsto p_{\mathcal{M}}$  представляет собой гомоморфизм группы путей  $P$  в линейное пространство  $\mathcal{M}_0$ , которое



рассматривается в данном случае как группа относительно сложения векторов. Ядром гомоморфизма является *подгруппа*  $L \subset P$  *петель* или *замкнутых путей*, т. е. таких  $l \in P$ , которые имеют нулевой вектор сдвига,  $l_M = 0$ . Эта подгруппа инвариантна в  $P$ . Фактор-группа по ней  $P/L$  изоморфна группе  $M_0$  (относительно сложения) или, другими словами, группе сдвигов аффинного пространства  $\mathcal{M}$ . Например, если  $P$  — группа путей в пространстве Минковского, то  $P/L = T$ , где  $T$  — группа сдвигов или трансляций пространства Минковского.

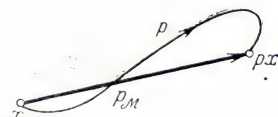


Рис. 12.

Вернемся еще раз к соотношению между группоидом  $\hat{P}$  путей с закрепленными концами и группой  $P$  свободных путей. Рассмотрим естественную проекцию  $\pi: \hat{P} \rightarrow \hat{P}/\sim = P$ , которая сопоставляет каждому  $p_x^{x'} \in \hat{P}$  его класс эквивалентности  $p \in P$ . Это отображение сохраняет групповые операции, т. е. является гомоморфизмом группоидов:

$$p^{x''} p_x^{x'} = (p') p_x^{x''}, \quad (p_x^{x'})^{-1} = (p^{-1})_x^{x'}. \quad (2.2)$$

### § 3. Действие группы путей в аффинном пространстве

Группа путей может быть интерпретирована как обобщение *группы трансляций* (сдвигов), и приложения ее существенным образом связаны с этой интерпретацией. Рассмотрим поэтому, как группа путей  $P$  действует на пространстве  $\mathcal{M}$ . Для приложений, рассматриваемых в части II, под  $\mathcal{M}$  следует понимать пространство Минковского, однако все определения очевидным образом справедливы и в случае произвольного аффинного пространства.

Пусть  $x \in \mathcal{M}$ . Действие пути  $[\xi] \in P$  на точку  $x$  естественно определить как перенос этой точки вдоль такой кривой из класса  $[\xi]$ , которая начинается в точке  $x$ . Выберем произвольную кривую  $\{\xi\} \in [\xi]$ , подчиняющуюся условию  $\xi(0) = x$ . Тогда по определению  $[\xi]x = \xi(1)$ . Если не накладывать условия  $\xi(0) = x$ , а воспользоваться произвольным представителем  $\{\xi\} \in [\xi]$ , то действие пути на точку запишется как

$$[\xi]x = x + \xi(1) - \xi(0) = x + [\xi]_M.$$

Следовательно, под действием пути  $p = [\xi]$  все точки пространства  $\mathcal{M}$  сдвигаются на один и тот же вектор, равный  $p_M$ . Это оправдывает название «вектор сдвига» для этого вектора (см. рис. 12).

Мы знаем, что каждому вектору  $a \in M_0$  соответствует преобразование аффинного пространства  $\mathcal{M}$  — трансляция на вектор  $a$ . Обозначим это преобразование через \*)  $a_T$ . Все такие преобразо-

\*) Индекс  $T$  здесь указывает на то, что  $a_T$  есть элемент множества  $T$  (группы трансляций) в отличие от  $a$  (вектора из пространства  $M_0$ ).



вания образуют группу  $T$  — группу трансляций пространства  $\mathcal{M}$ . Она изоморфна аддитивной группе векторов  $\mathcal{M}_0$  и отличается от нее лишь тем, что произведение в группе трансляций принято записывать мультипликативно:  $a_T a'_T = (a + a')_T$ . Поэтому отображение  $p \mapsto p_{\mathcal{M}}$  можно продолжить до отображения  $p \mapsto p_T$  из группы путей в группу трансляций. Здесь по определению  $p_T = (p_{\mathcal{M}})_T$  и выполняется соотношение

$$(p'p)_T = p'_T p_T.$$

Отображение  $p \mapsto p_T$  является, очевидно, гомоморфизмом группы путей в группу трансляций пространства  $\mathcal{M}$ . При этом в гомоморфизме прообразом единицы (т. е. ядром гомоморфизма) является подгруппа петель  $L \subset P$ .

Вернемся к тому, как группа  $P$  действует на пространстве  $\mathcal{M}$ . Очевидно, что  $P$  действует на  $\mathcal{M}$  транзитивно, т. е. для любых двух точек  $x, x' \in \mathcal{M}$  найдется такой путь  $p \in P$ , который точку  $x$  переводит в  $x'$  (таким свойством обладает любой путь, для которого вектор сдвига  $p_{\mathcal{M}} = x' - x$ ). А это означает, что пространство  $\mathcal{M}$  можно представить как фактор-пространство группы  $P$  по некоторой подгруппе. Действительно, если относительно какой-то группы  $P$  известно, что она действует на пространстве  $\mathcal{M}$  транзитивно (в таком случае говорят, что  $\mathcal{M}$  — однородное пространство), то найдется (см., например, [37]) такая подгруппа  $L \subset P$ , что  $\mathcal{M} = P/L$ . Более конкретно, подгруппа  $L$  определяется как стабилизатор произвольной точки  $x_0 \in \mathcal{M}$  (т. е. множество элементов группы  $P$ , оставляющих эту точку на месте). Отождествление  $\mathcal{M} = P/L$  сопоставляет каждому правому смежному классу  $pL \in P/L$  точку  $x = px_0 = x_0 + p_{\mathcal{M}}$ . При этом действие группы  $P$  на  $P/L$  по закону  $p : p'L \mapsto pp'L$  соответствует преобразованию пространства  $\mathcal{M}$  под действием  $P$ . Фактор-пространство  $P/L$  оказывается моделью однородного пространства  $\mathcal{M}$  (изоморфно ему).

Применим эту общую схему к нашему случаю. В качестве точки  $x_0$  можно выбрать любую точку из  $\mathcal{M}$ . Стабилизатором этой точки является подгруппа петель  $L \subset P$ . Пространство  $\mathcal{M}$  отождествляется с фактор-пространством  $P/L$ , т. е. множеством правых смежных классов  $pL = \{pl \mid l \in L\}$ . При этом класс  $pL$  отождествляется с точкой  $x = px_0 = x_0 + p_{\mathcal{M}}$ . Смежный класс  $pL$  составляют пути, имеющие одинаковый вектор сдвига  $p_{\mathcal{M}}$ . Этот вектор и определяет точку пространства  $\mathcal{M}$ , которая сопоставляется данному смежному классу (рис. 13).

**З а м е ч а н и е.** Мы видим, что подгруппа петель  $L \subset P$  естественно возникает в том случае, когда рассматривается действие группы в пространстве  $\mathcal{M}$ . Именно по этой причине подгруппа петель играет (как мы увидим позднее) ключевую роль в калибровочной теории — теории частиц и полей в пространстве Минковского. В отличие от этого гравитация — это теория в искривленном пространстве-времени. Как мы увидим, гравитацию тоже можно сформулировать в терминах группы путей (причем

путей в пространстве Минковского!), однако в этом случае ключевую роль будет играть уже не подгруппа петель, а другая подгруппа, связанная с группой голономии.

Мы убедились, таким образом, что одно и то же фактор-множество  $P/L$  можно интерпретировать двумя различными способами. Во-первых, можно задать на нем действие группы  $P$  по правилу  $p: p'L \mapsto pp'L$  и сопоставить его элементы (правые смежные классы) с точками аффинного пространства  $\mathcal{M}$ . Тогда  $P/L$  оказывается моделью пространства  $\mathcal{M}$ , которое в этом случае рассматривается как однородное пространство. Во-вторых, можно воспользоваться тем, что подгруппа  $L$  инвариантна, так что правые и левые смежные классы совпадают,  $pL = Lp$ , и на множестве таких классов  $P/L$  ввести структуру группы, положив  $(pL)(p'L) = (pp'L)$ . Тогда фактор-группа  $P/L$  оказывается моделью группы трансляций  $T$  (или, что то же, аддитивной группы векторов  $\mathcal{M}_0$ ). Разумеется, такая двойственность интерпретации фактор-множества  $P/L$  является отражением той двойственности, которая существует между аффинным пространством  $\mathcal{M}$  и ассоциированным с ним векторным пространством  $\mathcal{M}_0$ .

Основным объектом, который понадобится нам в данной главе, является группа  $P$  «свободных» путей  $[\xi] = p$ . Однако технически удобно иногда пользоваться и путями с закрепленными концами  $[\xi]_x^{x'} = p_x^{x'}$ . Каждый раз, когда мы будем это делать, мы будем понимать под  $p_x^{x'}$  совокупность тех кривых из класса  $p$ , которые начинаются в точке  $x$  и кончаются в точке  $x'$ . В этом смысле можно сказать, что класс кривых  $p$  разбивается на непересекающиеся подклассы  $p_x^{x'}$ , где  $x \in \mathcal{M}$  — любое, а  $x' = x + p_{\mathcal{M}}$ .

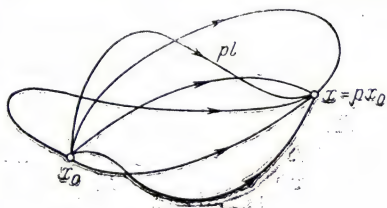


Рис. 13.

#### § 4. Описание симметричной системы с помощью индуцированного представления группы симметрии

Мы описали группу путей в произвольном аффинном пространстве  $\mathcal{M}$ . В частности, если выбрать в качестве  $\mathcal{M}$  пространство Минковского, то группа путей  $P$  будет непосредственным обобщением группы трансляций пространства Минковского,  $T$ . Мы знаем, что группа трансляций играет важную роль в теории свободных релятивистских частиц. Это дает некоторое основание надеяться, что группа путей должна играть определенную роль в теории частиц, движущихся в силовых полях. Можно привести некоторые доводы в пользу этого, однако никаких серьезных оснований верить в это априори нет, и только окончательный результат может оправдать это предположение. Мы увидим в конце концов, что группа путей действительно имеет отношение к опи-



санию свойств частицы, движущейся во внешних полях — калибровочных и гравитационных. Мы увидим также, что роль группы путей и ее представлений в теории калибровочно заряженных частиц во многом отличается от той роли, которую играет группа трансляций в теории свободных частиц.

Пока же нам не остается ничего другого, как предположить (по существу произвольно), что группа путей может играть роль в теории частиц, движущихся в силовых полях, и попытаться найти представления этой группы, которые имеют к этому отношение. К счастью, имеется хорошо отработанная схема, которая поможет в этом поиске — теория *индуцированных представлений* групп и их приложений в теории элементарных частиц [36, 37].

Изложим по необходимости кратко некоторые сведения из этой теории. Прежде всего приведем определение индуцированного представления, опуская многие детали для того, чтобы выделить главное — алгебраическую структуру, лежащую в основе этого определения. Начнем с физического смысла индуцированного представления.

Пусть группа  $P$  (сейчас это отнюдь не обязательно группа путей) действует на некотором пространстве  $\mathcal{M}$ . Эта пара (группа и пространство, на котором она действует) является основой для описания классической системы, обладающей симметриями. Группа  $P$  описывает симметрии системы, а пространство  $\mathcal{M}$  — некоторую *наблюдаемую* величину, характеризующую состояние системы (фактически может быть несколько наблюдаемых, если  $\mathcal{M}$  многомерно). Точка  $x \in \mathcal{M}$  — это возможное значение наблюдаемой. При преобразовании из группы  $p \in P$  значение  $x \in \mathcal{M}$  меняется. Новое значение равно  $px$ .

Теперь рассмотрим квантовую систему, обладающую той же группой симметрии  $P$ . Состояния квантовой системы образуют некоторое линейное пространство  $\mathcal{H}$ . Если имеется некоторое состояние  $\psi \in \mathcal{H}$ , то после преобразования симметрии  $p \in P$  состояние это меняется. Новое состояние есть  $U(p)\psi$ , где  $U(p)$  — некоторый линейный оператор в пространстве  $\mathcal{H}$ . Отображение  $p \mapsto U(p)$  должно сохранять правило умножения,  $U(p'p) = U(p')U(p)$ . Следовательно,  $U(P)$  — не что иное, как *линейное представление группы*. Таким образом, в основе квантового описания симметричной системы лежит пара: группа и линейное пространство, на котором действует представление этой группы.

В некоторых случаях при описании системы используются одновременно обе схемы — и классическая, и квантовая. Это имеет место, если среди состояний из  $\mathcal{H}$  есть такие состояния  $\psi_x$ , в которых наблюдаемая, описываемая пространством  $\mathcal{M}$ , имеет определенное значение  $x \in \mathcal{M}$ . Пусть такие состояния образуют подпространство \*)  $\mathcal{H}_x \subset \mathcal{H}$ . Тогда после преобразования из группы симметрии  $p \in P$  состояние  $\psi_x$  переходит в  $U(p)\psi_x$ . Но в то же время после преобразования  $p$  значение наблюдаемой  $x \in \mathcal{M}$

\*) На самом деле вектор  $\psi_x$  может быть обобщенным, ненормируемым вектором типа дельта-функции, но это сейчас для нас несущественно.



должно меняться на  $p_x$ . Значит, должно быть  $U(p) \psi_x \in \mathcal{H}_{p_x}$ . Это должно выполняться для любого  $\psi_x \in \mathcal{H}_x$ , т. е. можно гарантировать, что  $U(p) \mathcal{H}_x \subset \mathcal{H}_{p_x}$ .

Таким образом, если симметричная квантовая система в то же время имеет интерпретацию в терминах классической наблюдаемой (например, положения), то между квантовым и классическим аспектами ее описания должно быть совершенно определенное согласование. Это согласование проявляется в том, что пространство состояний  $\mathcal{H}$  представляется в виде суммы подпространств  $\mathcal{H}_x$ ,  $x \in \mathcal{M}$ , причем представление  $U(P)$ , действующее в  $\mathcal{H}$ , удовлетворяет условию  $U(p) \mathcal{H}_x \subset \mathcal{H}_{p_x}$ . С математической точки зрения представление с такими свойствами называется *импримитивным*. Следовательно, согласование квантового и классического аспектов в описании симметричной системы состоит в том, что представление группы симметрии, действующее в пространстве состояний, должно быть импримитивным.

Далее вступает в игру *теорема* (доказанная *Макки*), которая утверждает, что любое импримитивное представление эквивалентно индуцированному. При единственном условии, что группа  $P$  действует на пространстве  $\mathcal{M}$  *транзитивно* (любая точка может быть переведена в любую другую точку преобразованием из группы). Однако это условие не так уж ограничительно. Действительно, если  $P$  действует на  $\mathcal{M}$  *интранзитивно* (т. е. не транзитивно, так что имеются пары точек, не связанные никаким преобразованием из группы), то пространство  $\mathcal{M}$  разбивается на *области транзитивности* (*орбиты* группы), и к каждой из них теорема уже вполне применима.

Итак, *симметричная квантовая система, имеющая в то же время интерпретацию в терминах классической наблюдаемой, должна описываться импримитивным представлением. А каждое импримитивное представление эквивалентно индуцированному*. Отсюда и видна роль, которую играют индуцированные представления при описании квантовых симметричных систем. Что же такое индуцированное представление и как его использовать для описания симметричной квантовой системы?

Пусть группа  $P$  имеет подгруппу  $L$  и задано представление подгруппы  $L$  в пространстве  $\mathcal{L}$ . Обозначим это представление через  $\alpha(L)$ . Таким образом, каждому  $l \in L$  сопоставляется оператор  $\alpha(l)$  в линейном пространстве  $\mathcal{L}$ . Если задано представление подгруппы,  $\alpha(L)$ , то можно построить представление всей группы  $P$ , которое обозначается  $U(P) = \alpha(L) \uparrow P$  и называется *индуцированным*. Строится оно следующим образом. Пространство  $\mathcal{H}$ , в котором определено действие  $U(p)$ , состоит из функций  $\Psi: P \rightarrow \mathcal{L}$ , удовлетворяющих дополнительному условию

$$\Psi(pl) = \alpha(l^{-1}) \Psi(p) \quad (4.1)$$

при любых  $p \in P$ ,  $l \in L$ . Будем называть это условие *структурным условием*. Действие операторов  $U(p)$  в пространстве таких

функций сводится к левому сдвигу:

$$(U(p)\Psi)(p') = \Psi(p^{-1}p'). \quad (4.2)$$

Если не считать некоторых деталей из области функционального анализа, то этим определение индуцированного представления исчерпывается. Как же связано индуцированное представление со схемой описания симметричной системы?

Пусть группа  $P$  действует в пространстве  $\mathcal{M}$  транзитивно, т. е.  $\mathcal{M}$  — однородное пространство. Тогда его можно отождествить с фактор-пространством  $\mathcal{M} = P/L$ , если подходящим образом подобрать подгруппу  $L$  (см. об этом § 3). Именно из этой подгруппы и следует индуцировать, чтобы получить импримитивное представление.

Чтобы лучше вскрыть физический смысл индуцированного представления, данное выше определение необходимо перевести на несколько иной язык, так, чтобы вместо функций  $\Psi(p)$ , аргументом которых являются элементы группы, пространство  $\mathcal{H}$  было реализовано функциями  $\psi(x)$  на пространстве  $\mathcal{M}$ . Для этого продолжим операторнозначные функции  $\alpha(l)$  на всю группу  $P$  так, чтобы выполнялось соотношение

$$\alpha(pl) = \alpha(p)\alpha(l) \quad (4.3)$$

(для любых  $p \in P$ ,  $l \in L$ ). Обозначим  $\psi(p) = \alpha(p)\Psi(p)$ . Тогда в силу условий (4.1) и (4.3) функция  $\psi$  удовлетворяет условию  $\psi(pl) = \psi(p)$  при любых  $p \in P$ ,  $l \in L$ . Другими словами, она постоянна на каждом смежном классе  $pL$ . По этой причине ее можно рассматривать не как функцию на группе  $P$ , а как функцию на множестве смежных классов, т. е. на фактор-пространстве  $P/L$ . Наконец, поскольку смежные классы, составляющие это пространство, отождествлены с точками пространства  $\mathcal{M}$ , то вместо  $\psi(pL)$  можно написать  $\psi(x)$ . Так мы получаем вместо функции на группе  $\Psi(p)$  функцию на однородном пространстве  $\psi(x)$ . Значениями ее по-прежнему являются векторы из пространства  $\mathcal{L}$ .

Как же преобразуется функция  $\psi(x)$  под действием представления  $U(p)$ ? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно от  $\psi$  перейти к соответствующей функции  $\Psi$ , затем преобразовать ее по формуле (4.2) и снова перейти к функции типа  $\psi$ . Это дает

$$(U(p)\psi)(x) = \alpha(p')[\alpha(p^{-1}p')]^{-1}\psi(p^{-1}x), \quad (4.4)$$

где  $p'$  — такой элемент группы  $P$ , что смежный класс  $p'L$  сопоставляется точке  $x$ . Векторы, соответствующие функциям вида  $\psi_x(x') = f\delta(x', x)$  (где  $f \in L$ , а  $\delta(x', x)$  — дельта-функция или символ Кронекера), соответствуют состояниям  $\psi_x$  с определенным значением наблюдаемой  $x \in \mathcal{M}$ .

Вид преобразования (4.4) упрощается, если удастся выбрать функцию  $\alpha(p)$  так, чтобы она была представлением группы  $P$ , т. е. чтобы кроме (4.3) выполнялось более сильное условие

$$\alpha(p'p) = \alpha(p')\alpha(p).$$



В этом случае вместо (4.4) получаем более простую формулу

$$(U(p)\psi)(x) = \alpha(p)\psi(p^{-1}x).$$

Такую форму записи представления  $\alpha(L) \uparrow P$  называют *ковариантной*. Однако следует заметить, что конкретный выбор функции  $p \mapsto \alpha(p)$ , удовлетворяющей условию (4.3) с заданными  $\alpha(l)$ ,  $l \in L$ , есть лишь вопрос удобства. Иногда бывает невозможно выбрать функцию  $\alpha(p)$  так, чтобы она была представлением группы  $P$ . В этом случае ковариантной записи представления  $\alpha(L) \uparrow P$  не существует.

Можно перейти к функции  $\psi(x)$  и не вводя явно функцию  $\alpha(p)$ . Вместо этого из каждого смежного класса  $x = pL$  выберем и зафиксируем по одному *представителю*  $x_p$  и положим  $\psi(x) = \Psi(x_p)$ . Тогда закон преобразования этой функции имеет вид

$$(U(p)\psi)(x) = \alpha(x_p^{-1}p(p^{-1}x)_p)\psi(p^{-1}x).$$

Подчеркнем, что в этом случае выбор представителей  $x_p$  раз навсегда зафиксирован. Если мы изменим этот выбор, то изменится и определение функции  $\psi(x)$ . Нетрудно видеть, что этот способ определения функции  $\psi(x)$  по существу совпадает с описанным выше. Он соответствует выбору  $\alpha(x_pl) = \alpha(l)$ .

Резюмируя, можно сформулировать *схему описания симметричной квантовой системы* следующим образом. Пусть система обладает группой симметрии  $P$  и в то же время ее состояния интерпретируются в терминах наблюдаемой  $x \in \mathcal{M}$ , где  $\mathcal{M}$  — однородное пространство относительно действия группы  $P$ . Тогда реализуем это пространство как фактор-пространство,  $\mathcal{M} = P/L$ , берем произвольное представление  $\alpha(L)$  группы  $L$  и индуцируем его на группу  $P$ . Пространство  $\mathcal{H}$ , в котором действует представление  $U(P) = \alpha(L) \uparrow P$ , и есть пространство состояний нашей системы. Реализация пространства  $\mathcal{H}$  как пространства функций на  $\mathcal{M}$  дает интерпретацию состояний в терминах наблюдаемой  $x \in \mathcal{M}$ .

Если задано однородное пространство  $\mathcal{M}$ , то подгруппа  $L$  (стабилизатор одной из точек этого пространства) находится с точностью до изоморфизма. Следовательно, произвол, содержащийся в этой схеме, сводится к выбору представления  $\alpha(L)$ . Это представление и пространство  $\mathcal{L}$ , в котором оно действует, описывают *внутренние степени свободы* системы (внутренние по отношению к наблюдаемой  $x \in \mathcal{M}$ ). Эта схема позволяет строить теорию квантовых систем, основываясь на том, какими симметриями эти системы обладают. Так строится теория свободных релятивистских или нерелятивистских частиц. Так мы будем строить теорию частиц, движущихся в калибровочном или гравитационном поле.

Сформулированная схема применима без всяких оговорок в том случае, если среди состояний системы есть состояния  $\psi_x \in \mathcal{H}$  (хотя бы обобщенные) с определенным значением наблюдаемой  $x \in \mathcal{M}$ . Если это не так, то после построения индуцированного представления  $U(P) = \alpha(L) \uparrow P$  следует выделить некоторое его



подпредставление  $U_1(P)$ . Пространство  $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ , в котором оно действует, и будет описывать состояния системы\*). В этом случае возникает дополнительный произвол, заключающийся в выборе подпредставления  $U_1(P)$ , который устраняется на основании тех или иных физических соображений (например, в теории релятивистских частиц выделяется неприводимое подпредставление, что соответствует элементарности частицы). Интерпретация состояний в терминах наблюдаемой  $x \in \mathcal{M}$  в этом случае осуществляется при помощи операции переплетения представлений  $U_1$  и  $U$ , т. е. при помощи оператора  $J: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}$ , коммутирующего с представлениями,  $JU_1(p) = U(p)J$ .

Состояния из пространства  $\mathcal{H}$  в этом случае также могут иметь непосредственный физический смысл, однако не как реальные, наблюдаемые состояния, а как *виртуальные состояния*, возникающие в теории в качестве *квантовых альтернатив* для реальных процессов (см. § 1 гл. 2, а также работы [36, 37]). Например, в теории релятивистских частиц состояния, локализованные в одной точке пространства-времени, возникают в качестве виртуальных состояний при описании взаимодействий между частицами при помощи диаграмм Фейнмана [36, 37].

В следующем параграфе мы познакомимся с конкретным примером применения этой схемы в теории свободных релятивистских частиц. А затем применим ее к описанию частиц, движущихся в калибровочном поле.

## § 5. Группа Пуанкаре и локальные свойства свободных частиц

В предыдущем параграфе была сформулирована процедура, которая позволяет получить описание симметричной квантовой системы в терминах индуцированных представлений группы симметрии. В дальнейшем мы применим эту процедуру к описанию частиц, движущихся в калибровочном поле. Однако прежде познакомимся ближе с этой процедурой на хорошо знакомом примере — *свободных релятивистских частиц* (подробно он разобран в книге [37]).

Релятивистские частицы обладают симметриями, описываемыми *группой Пуанкаре*, и движутся в пространстве-времени Минковского  $\mathcal{M}$ . Последнее утверждение означает, что состояния частиц должны иметь интерпретацию в терминах наблюдаемой  $x \in \mathcal{M}$ . Следовательно, есть все основания применить схему, сформулированную в предыдущем параграфе.

Группа Пуанкаре действует на пространстве Минковского транзитивно. Следовательно, это пространство можно моделировать как фактор-пространство группы Пуанкаре. Для того

---

\*) Описание симметричной системы при помощи индуцированных представлений тесно связано с формализмом *обобщенных когерентных состояний*, введенных Переломовым (см. [38—40]).

чтобы это сделать, необходимо взять любую точку пространства  $\mathcal{M}$  и найти стабилизатор этой точки. Удобно (хотя и не обязательно) выбрать в качестве такой точки начало отсчета  $O$ . Стабилизатором этой точки является (однородная) группа Лоренца. Обозначим буквой  $\Pi$  группу Пуанкаре и буквой  $\Lambda$  — группу Лоренца. Тогда  $\mathcal{M} = \Pi/\Lambda$ . Конкретно точке  $x \in \mathcal{M}$  сопоставляется смежный класс  $x_T \Lambda \in \Pi/\Lambda$ , где  $x_T$  — элемент группы трансляций  $T$ , а именно — трансляция на вектор  $x$ .

После того как мы нашли такую подгруппу  $\Lambda \subset \Pi$ , что множество значений интересующей нас наблюдаемой  $\mathcal{M}$  представляется в виде  $\Pi/\Lambda$ , остается выбрать произвольное представление подгруппы  $\Lambda$  и индуцировать его на группу  $\Pi$ . Обозначим выбранное представление через  $\sigma(\Lambda)$ . В теории релятивистских частиц это конечномерное представление группы Лоренца. Состояния частицы описываются векторами  $\psi \in \mathcal{H}_\sigma$  из пространства, в котором действует представление  $U_\sigma(\Pi) = \sigma(\Lambda) \uparrow \Pi$ .

Как всегда, пространство  $\mathcal{H}_\sigma$  можно реализовать функциями  $\Psi: \Pi \rightarrow \mathcal{L}_\sigma$ , где  $\mathcal{L}_\sigma$  — линейное пространство, в котором действует представление  $\sigma(\Lambda)$ . Функции, входящие в  $\mathcal{H}_\sigma$ , удовлетворяют дополнительному структурному условию

$$\Psi(\pi\lambda) = \sigma(\lambda^{-1}) \Psi(\pi)$$

при любых  $\pi \in \Pi$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . Оператор  $U_\sigma(\pi)$  действует на такую функцию как левый сдвиг:

$$(U_\sigma(\pi) \Psi)(\pi') = \Psi(\pi^{-1}\pi').$$

Чтобы перейти к ковариантной записи того же представления, необходимо функцию  $\sigma(\lambda)$  с группы  $\Lambda$  продолжить на всю группу  $\Pi$  так, чтобы выполнялось соотношение

$$\sigma(\pi\lambda) = \sigma(\pi) \sigma(\lambda) \quad (5.1)$$

(для  $\pi \in \Pi$ ,  $\lambda \in \Lambda$ ). Желательно (но не обязательно), чтобы функция  $\pi \mapsto \sigma(\pi)$  была представлением группы  $\Pi$ . В данном случае это оказывается возможным. Запишем произвольный элемент группы Пуанкаре в виде произведения  $\pi = a_T \lambda$  трансляции  $a_T \in T$  (на вектор  $a$ ) и преобразования из группы Лоренца  $\lambda \in \Lambda$ . Положим  $\sigma(a_T \lambda) = \sigma(\lambda)$ . Очевидно, такая функция удовлетворяет наложенному на нее условию (5.1). Кроме того, она оказывается представлением группы  $\Pi$ . Это легко доказать, пользуясь правилом умножения элементов группы Пуанкаре

$$(a_T \lambda)(a'_T \lambda') = (a + \lambda a'_T)_T \lambda \lambda', \quad (5.2)$$

которое в свою очередь следует из «перестановочного соотношения» элементов группы Лоренца с элементами группы трансляций:

$$\lambda a_T \lambda^{-1} = (\lambda a)_T, \quad (5.3)$$

и правила умножения в группе трансляций  $a_T a'_T = (a + a')_T$ .

Пользуясь полученной функцией  $\sigma(\pi)$ , перейдем от функции  $\Psi(\pi)$  к функции  $\psi(\pi) = \sigma(\pi) \Psi(\pi)$ . Эта функция постоянна на



смежных классах  $x_T \Lambda$  и поэтому сводится к функции на пространстве Минковского  $\psi(x)$ . Для этого достаточно воспользоваться соответствием  $x_T \Lambda \mapsto x_T O = x$  между смежными классами из  $\Pi/\Lambda$  и точками из  $\mathcal{M}$ . Под действием представления  $U_\sigma(\Pi)$  эта функция преобразуется как

$$\begin{aligned} (U_\sigma(a_T)\psi)(x) &= \psi(x - a), \\ (U_\sigma(\lambda)\psi)(x) &= \sigma(\lambda)\psi(\lambda^{-1}x). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Это хорошо известный ковариантный закон преобразования волновой функции релятивистской частицы под действием преобразований из группы Пуанкаре, причем  $\sigma(\lambda)$  — матрица, действующая на спинорные индексы (нумерующие компоненты векторов из  $\mathcal{L}_\sigma$ ).

Полученное пространство состояний  $\mathcal{H}_\sigma$  интерпретируется в терминах наблюдаемой  $x \in \mathcal{M}$ . Точнее, для каждого  $x \in \mathcal{M}$  существуют такие состояния  $\psi_x \in \mathcal{H}_\sigma$ , которые соответствуют определенному значению этой наблюдаемой, равному  $x$ . Волновые функции таких состояний имеют вид  $\psi_x(x') = f\delta(x' - x)$ , где  $f \in \mathcal{L}_\sigma$ . Мы видим, что даже когда наблюдаемая положения имеет определенное значение  $x \in \mathcal{M}$ , состояние этим полностью не определено. Для его определения требуется еще задать вектор  $f \in \mathcal{L}_\sigma$ . Следовательно, пространство  $\mathcal{L}_\sigma$  описывает внутренние (в данном случае спинорные) степени свободы частицы.

Функции  $\psi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L}_\sigma$ , описывающие состояния из пространства  $\mathcal{H}_\sigma$ , совершенно произвольны. В частности, они могут быть сосредоточены в любой, сколь угодно малой области пространства-времени. Другими словами, среди состояний  $\psi \in \mathcal{H}_\sigma$  есть состояния, соответствующие локализации частицы в сколь угодно малой области пространства-времени. Более того, функции вида  $\psi_x(x') = f\delta(x' - x)$  описывают состояния, в которых частица локализована в единственной точке пространства-времени. Но это значит, что в таких *локализованных состояниях* частица существует не при всех временах. Состояние, локализованное в ограниченной области пространства Минковского, описывает частицу, которая в какой-то момент времени появляется, в течение следующего за ним интервала времени существует в некоторой ограниченной области пространства, а затем в некоторый момент времени исчезает. Конечно, это не соответствует обычному представлению о стабильной частице, существующей в любой момент времени. Поэтому все состояния из пространства  $\mathcal{H}_\sigma$  не могут быть реальными, наблюдаемыми состояниями.

Для того чтобы описать *реальные состояния свободной релятивистской частицы*, необходимо выделить в пространстве  $\mathcal{H}_\sigma$  некоторое подпространство, инвариантное относительно группы  $\Pi$ . В нем будет действовать некоторое представление, являющееся подпредставлением индуцированного представления  $U_\sigma$  (см. замечание в конце предыдущего параграфа). Для описания элементарной частицы естественно потребовать, чтобы такое подпредставление было неприводимым,

Неприводимое представление группы Пуанкаре характеризуется двумя числами — массой  $m$  (положительное число) и спином  $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ . Следовательно, элементарная частица описывается неприводимым представлением  $U_{mj}$  (II), реальные состояния частицы описываются векторами из пространства  $\mathcal{H}_{mj}$ , в котором действует это представление, а пространственно-временная интерпретация этих состояний осуществляется при помощи оператора  $J_{mj}: \mathcal{H}_{mj} \rightarrow \mathcal{H}_\sigma$ , который позволяет найти координатное представление реальных состояний частицы. Этот оператор должен коммутировать с соответствующими представлениями или, как говорят, переплетать их:

$$J_{mj} U_{mj}(p) = U_\sigma(p) J_{mj}. \quad (5.5)$$

Из этого требования оператор  $J_{mj}$  находится однозначно или с небольшим произволом, имеющим физическую интерпретацию. Векторы  $\psi_{mj} \in \mathcal{H}_\sigma$ , которые получаются в результате действия этого оператора,  $\psi_{mj} = J_{mj} \varphi$ ,  $\varphi \in \mathcal{H}_{mj}$ , описываются, как можно показать, функциями вида

$$\psi_{mj}(x) = \int \frac{d^3 k}{k^0} e^{-i(k, x)} S_j(k) \varphi(k), \quad (5.6)$$

где интегрирование ведется по массовой поверхности  $(k, k) = m^2$ ,  $k^0 > 0$ , функция  $\varphi(k)$  — импульсное представление реального состояния частицы (т. е. произвольная функция на массовой поверхности со значениями в пространстве  $\mathcal{L}_j$  соответствующего представления группы вращений), а  $S_j(k)$  — оператор, переводящий из  $\mathcal{L}_j$  в  $\mathcal{L}_\sigma$ , для которого из условия (5.5) можно найти совершенно определенное выражение.

Свойства реальных состояний, а также их пространственно-временная интерпретация с помощью оператора  $J_{mj}$  подробно обсуждаются в работах [36, 37].

**З а м е ч а н и е.** Представление  $U_\sigma$  является универсальным и служит для пространственно-временной интерпретации частиц любых масс и нескольких спинов. В пространстве  $\mathcal{H}_\sigma$  этого представления пространственно-временная интерпретация описывается либо системой локализованных состояний  $\psi_x$ ,  $x \in \mathcal{M}$ , либо системой проекторов  $P(\mathcal{B})$ , сопоставляемых областям  $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$  и проектирующих пространство  $\mathcal{H}_\sigma$  на подпространства состояний, локализованных в этих областях,  $x \in \mathcal{B}$ . Такая система проекторов называется спектральной или проекторнозначной мерой. Она определенным образом преобразуется под действием представления  $U_\sigma$ :

$$U_\sigma(\pi) P(\mathcal{B}) U_\sigma(\pi^{-1}) = P(\pi\mathcal{B}),$$

и с учетом этих трансформационных свойств называется системой импримитивности. Если описывать частицы в терминах неприводимого подпредставления  $U_{mj}$ , т. е. в терминах пространства  $\mathcal{H}_{mj}$ , то для описания пространственно-временных свойств частицы можно ввести систему положительных операторов  $Q(\mathcal{B})$ , т. е. операторнозначную меру (но не проекторнозначную). Она имеет вид  $Q(\mathcal{B}) = K_{mj} P(\mathcal{B}) J_{mj}$ , где  $K_{mj}: \mathcal{H}_\sigma \rightarrow \mathcal{H}_{mj}$  — оператор, переплетающий представления  $U_\sigma$  и  $U_{mj}$ .



Таким образом, мы видим, что индуцированное представление  $U_\sigma(\Pi) = \sigma(L) \uparrow \Pi$  позволяет дать пространственно-временную интерпретацию состояниям  $\psi \in \mathcal{H}_\sigma$  и, в частности, реальным состояниям  $\psi_{mj} \in \mathcal{H}_{mj}$ . При этом локализованные состояния  $\psi \in \mathcal{H}_\sigma$ , не принадлежащие подпространству  $\mathcal{H}_{mj}$ , играют вспомогательную роль. Другими словами, теорию свободных частиц можно построить в рамках только пространства  $\mathcal{H}_{mj}$  реальных состояний, не вводя более широкого пространства  $\mathcal{H}_\sigma$  (хотя на наш взгляд введение его упрощает картину даже в этом случае). Однако оказывается, что при описании взаимодействий частиц локализованные состояния  $\psi \in \mathcal{H}_\sigma$  возникают в качестве квантовых альтернатив, через посредство которых происходят взаимодействия. Это подробно обсуждается в работах [36, 37], и здесь мы лишь в общих чертах охарактеризуем такой подход.

Взаимодействия релятивистских частиц можно описать, если предположить, что они являются локальными, т. е. происходят в одной точке пространства-времени. Другими словами, чтобы произошло взаимодействие, взаимодействующие частицы должны перейти в состояния, локализованные в одной и той же точке пространства Минковского  $x \in \mathcal{M}$ . Взаимодействие в этой точке состоит в том, что происходит некоторое превращение, переход одних частиц в другие. Реальный процесс происходит посредством цепочки (а точнее — сети) элементарных процессов типа 1) переход реальных состояний в локализованные; 2) превращения локализованных состояний одних частиц в локализованные (в той же точке) состояния других частиц; 3) переход локализованных состояний в реальные. Такого рода цепочки удобно перечислять с помощью диаграмм Фейнмана. Амплитуды вероятности реальных процессов вычисляются по правилам сложения и умножения амплитуд (см. § 1 гл. 2). Амплитуды элементарных процессов находятся из теоретикогрупповых соображений. Остающийся произвол соответствует произволу в выборе лагранжиана взаимодействия.

В работах [36, 37] показано, что на этом пути теорию взаимодействующих частиц можно изложить, не вводя такого понятия, как квантованное поле, в терминах лишь состояний частиц. Ценой, которую приходится за это платить, является необходимость кроме реальных состояний частиц  $\psi_{mj} \in \mathcal{H}_{mj}$  рассматривать еще виртуальные локализованные состояния  $\psi \in \mathcal{H}$ . Этот подход эквивалентен обычной квантовой теории поля (если взаимодействия в ней рассматриваются по теории возмущений) и позволяет проанализировать ее с новой точки зрения. В настоящее время, когда теория переживает период поисков, это кажется полезным.

Теперь, выяснив, как индуцированное представление группы Пуанкаре описывает локализованные состояния и каков их физический смысл, мы можем обратиться к соответствующим построениям на основе группы путей. При этом на первых порах мы также построим лишь локализованные состояния, которые вообще говоря не являются реальными. Главное, что представляет ценность при таком построении, — это вывод, что калибровочное поле можно интерпретировать как характеристику внутренних степеней свободы элементарных частиц. Другими словами, структура внутренних степеней свободы частицы может быть настолько богатой, что требует для своего описания введения нового поля (калибровочного). Именно это богатство структуры внутренних степеней

свободы объясняет, почему локализованные состояния заслуживают отдельного изучения. Их свойства оказываются нетривиальными. Изучению их посвящены главы 6—8 книги.

## § 6. Абеливо представление группы петель и электромагнитное поле

Мы познакомились в предыдущем параграфе с тем, как локальные свойства свободных релятивистских частиц можно описать с помощью индуцированного представления группы Пуанкаре. Схема, применимая в более общем случае, сформулирована в § 4. Теперь очередной нашей задачей является применение этой схемы к группе путей. Мы увидим, что в общем случае это приведет к понятию (вообще говоря, неабелева) калибровочного поля и частиц, движущихся под действием этого поля. Однако прежде чем перейти к этому общему случаю, остановимся на более простом примере абелева калибровочного, т. е. *электромагнитного поля*, и частиц, движущихся в нем. Это избавит нас на первых порах от некоторых чисто технических сложностей и позволит наглядно обрисовать общую идею подхода. Конечной целью для нас будет интерпретация ковариантной производной как генератора представления группы путей.

Итак, предположим, что элементарная частица движется в пространстве Минковского  $\mathcal{M}$  (т. е. состояния ее имеют интерпретацию в терминах наблюдаемой положения  $x \in \mathcal{M}$ ) и группа путей  $P$  является для нее группой симметрии. Согласно общей схеме § 4, для описания такой частицы необходимо построить модель пространства  $\mathcal{M}$  как фактор-пространства  $\mathcal{M} = P/L$ , и затем построить представление группы путей  $U(P) = \alpha(L) \uparrow P$ , индуцированное из некоторого представления  $\alpha$  подгруппы  $L$ . Мы уже видели в § 3, что подгруппа  $L$ , возникающая таким образом, — это подгруппа замкнутых путей или петель. Задача сводится к построению представления  $\alpha(L)$  группы петель. Сейчас мы рассмотрим простейшее нетривиальное представление этой группы, соответствующее электромагнитному полю. Общий случай будет рассмотрен позднее.

Пусть заданы четыре числовые функции на пространстве Минковского,  $A_\mu(x)$ ,  $\mu=0, 1, 2, 3$ , или, что то же, векторное поле на  $\mathcal{M}$ . Впоследствии это поле будет интерпретироваться как *вектор-потенциал* электромагнитного поля. Теперь же мы, считая это поле заданным, определим по нему представление группы петель формулой

$$\alpha(l) = \alpha[\xi_0] = \exp \left\{ ie \int_0^1 d\tau \dot{\xi}_0^\mu(\tau) A_\mu(\xi_0(\tau) - \xi_0(0)) \right\}, \quad (6.1)$$

где  $\{\xi_0\}$  — любая кривая из класса  $l = [\xi_0] \in L$ , а  $e$  — число (которое впоследствии будет отождествлено с зарядом). В показателе экспоненты стоит интеграл от дифференциальной формы  $A_\mu dx^\mu$



вдоль замкнутого контура  $l_0$ , начинающегося в начале отсчета  $O$ . Чтобы утверждать, что это представление группы петель, необходимо убедиться в том, что 1) правая часть этого равенства не зависит от конкретного выбора кривой в пределах класса  $l$ ; 2) выполняется свойство представления  $\alpha(l'l) = \alpha(l')\alpha(l)$ . Для доказательства этого мы вернемся несколько назад, определив сначала функцию на множестве непрерывных кривых  $P''$ , а затем с помощью последовательных отождествлений переходя к группе путей. По пути мы кроме представления группы петель определим представление группоида  $\hat{P}$  путей с закрепленными концами, что будет полезно для дальнейшего.

По заданному вектор-потенциалу  $A_\mu(x)$  сопоставим каждой непрерывной кусочно дифференцируемой кривой  $\{\xi\}$  на  $M$  число

$$\alpha\{\xi\} = \exp \left\{ ie \int_{\{\xi\}} A_\mu(x) dx^\mu \right\} = \exp \left\{ ie \int_0^1 d\tau \dot{\xi}^\mu(\tau) A_\mu(\xi(\tau)) \right\}. \quad (6.2)$$

Мы получили, таким образом, функцию на множестве  $P''$  непрерывных кусочно дифференцируемых кривых. Теперь нужно доказать, что эту функцию можно понимать как функцию на группоиде  $\hat{P}$ .

Прежде всего заметим, что в том случае, когда определено произведение двух кривых, выполняются соотношения

$$\alpha(\{\xi'\}\{\xi\}) = \alpha(\xi')\alpha(\xi), \quad \alpha(\{\xi\}^{-1}) = (\alpha(\xi))^{-1}. \quad (6.3)$$

Они легко проверяются при помощи определения произведения кривых (1.1) и определения обратной кривой. Далее мы последовательно будем рассматривать те отношения эквивалентности, которые вводились в § 1, и каждый раз убеждаться, что значение функции не меняется, если аргумент заменяется на эквивалентный.

Прежде всего непосредственно убеждаемся, что  $\alpha\{\xi\} = \alpha\{\xi'\}$ , если  $\{\xi\} \sim \{\xi'\}$ , т. е. если эти кривые отличаются лишь параметризацией,  $\xi'(\tau) = \xi(f(\tau))$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ . Это доказывается исходя из определения (6.2) при помощи замены переменной  $\tau \mapsto f(\tau)$ . Следовательно, функцию  $\alpha$  можно рассматривать как функцию на  $P' = P''/\sim$ , причем из (6.3) видно, что

$$\alpha((\xi')(\xi)) = \alpha(\xi')\alpha(\xi), \quad \alpha((\xi)^{-1}) = (\alpha(\xi))^{-1}.$$

Из этих соотношений следует, что  $\alpha((\xi)^{-1}(\xi)) = 1$  и, далее, что  $\alpha(\xi') = \alpha(\xi)$  каждый раз как  $(\xi') \sim (\xi)$  в смысле (1.2). Следовательно, функцию  $\alpha$  можно рассматривать как функцию от классов эквивалентности, т. е. функцию на группоиде  $\hat{P} = P'/\sim$ . При этом она определяет представление группоида, т. е. для любых  $\hat{p}, \hat{p}' \in \hat{P}$  имеют место соотношения

$$\alpha(\hat{p}'\hat{p}) = \alpha(\hat{p}')\alpha(\hat{p}).$$

Саму функцию  $\alpha$  можно записать в виде

$$\alpha(p_x') = \alpha(p)_x^{x'} = \exp \left\{ ie \int_{p_x^{x'}} A_\mu(x) dx^\mu \right\}, \quad (6.4)$$

где в показателе экспоненты стоит интеграл от формы  $A_\mu(x) dx^\mu$  по любой кривой из класса  $p_x^{x'}$ .

Окончательный вывод состоит в том, что определенную формулой (6.2) функцию на множестве непрерывных кривых можно рассматривать как *представление группоида путей* с закрепленными концами. Хотя в конечном счете нам понадобятся лишь представления группы путей, определенное только что представление группоида удобно использовать для упрощения многих формул. Прежде всего определим при помощи  $\alpha(\hat{P})$  представление группы петель.

Мы уже говорили в конце § 1, что подмножество  $L_x = P_x \subset \hat{P}$  путей, у которых начало и конец зафиксированы и совпадают друг с другом, является группой. Это группа петель с закрепленным началом. Ясно, что ограничивая функцию  $\alpha$  на это подмножество, мы получим представление группы  $L_x$ . Но нетрудно видеть, что эта группа изоморфна группе петель  $L$ . Действительно, рассматривая элемент  $l \in L$  как класс кривых, мы можем выделить в нем подкласс кривых, начинающихся в точке  $x$  (и заканчивающихся, разумеется, в той же точке). Этот подкласс совпадает с некоторым классом  $l_x \in L_x$ . Обратно, по данному элементу  $l_x \in L_x$  мы можем однозначно восстановить класс кривых  $l \in L$ , содержащих  $l_x$  в качестве подкласса. Таким образом, между группами  $L$  и  $L_x$  имеется взаимно однозначное соответствие  $l \mapsto l_x$ . Нетрудно понять, что это соответствие является изоморфизмом.

Это позволяет по представлению группы  $L_x$  построить *представление группы  $L$* . Представление группоида  $\alpha(\hat{P})$  определяет представление каждой из групп петель  $L_x$ ,  $x \in \mathcal{M}$ , причем эти представления, вообще говоря, не эквивалентны. По каждому из них мы можем построить представление группы  $L$ . Для этого достаточно лишь положить  $\alpha_x(l) = \alpha(l_x)$ . Можно воспользоваться любым из этих представлений, при этом окончательные физические выводы не будут зависеть от выбора точки  $x \in \mathcal{M}$ . Этот произвол соответствует произволу в выборе начала отсчета пространства Минковского. Для простоты будем выбирать в данном случае  $x = O$ . Тогда окончательно получим определение

$$\alpha(l)_i = \alpha(l_O) = \exp \left\{ ie \int_{l_O} A_\mu(x) dx^\mu \right\}, \quad (6.5)$$

совпадающее с (6.1).

Полученное *представление группы петель является адекватным описанием электромагнитного поля*. Поясним это, не входя в детали. Как известно, интеграл по замкнутому контуру от дифференциальной формы  $A_\mu dx^\mu$  равен интегралу по поверхности,



натянутой на этот контур, от формы  $\frac{1}{2} F_{\mu\nu}(x) d\sigma^{\mu\nu}$ , где  $d\sigma^{\mu\nu}$  — элемент поверхности, а

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\nu}$$

— напряженность поля, имеющего вектор-потенциал  $A_\mu(x)$ . Следовательно, можно написать

$$\alpha(l) = \exp \left\{ ie \int_{\Sigma} F_{\mu\nu}(x) d\sigma^{\mu\nu} \right\},$$

где граница поверхности  $\Sigma$  равна  $\partial\Sigma = l_0$ .

Это значит, что хотя определение представления  $\alpha$  было дано в терминах вектор-потенциала  $A_\mu$ , на самом деле оно зависит лишь от напряженности  $F_{\mu\nu}$  соответствующего электромагнитного поля. На самом деле, однако, можно утверждать даже больше: представление (6.5) описывает электромагнитное поле всегда адекватно, тогда как напряженность  $F_{\mu\nu}$  — не всегда. Действительно, бывают ситуации (например, эффект Ааронова — Бома см. гл. 7, § 1), когда напряженность всюду в некоторой области равна нулю, однако экспоненты (6.5), соответствующие петлям, лежащим в этой области, не равны нулю. И действительно, в таких случаях наблюдаются физические эффекты, свидетельствующие о наличии электромагнитного поля.

Таким образом, мы построили представление группы петель  $\alpha(L)$ , которое адекватно описывает электромагнитное поле. В следующем параграфе мы покажем, что индуцированное представление  $U(P) = \alpha(L) \uparrow P$  группы путей описывает заряженные частицы, движущиеся в электромагнитном поле, и получим интерпретацию ковариантной производной как генератора представления  $U(P)$ . Затем уже не составит большого труда обобщить эти конструкции на случай представления  $\alpha(L)$  некоммутирующими операторами. Это приведет нас к описанию неабелева калибровочного поля и частиц, движущихся под его воздействием.

## § 7. Индуцированное представление и заряженные частицы в электромагнитном поле

Мы нашли в предыдущем параграфе простейшее нетривиальное представление группы петель экспонентами:

$$\alpha(l) = \exp \left\{ ie \int_{l_0} A_\mu(x) dx^\mu \right\}.$$

Теперь следует индуцировать это представление на всю группу путей. Напомним рассуждения, которые приводят к такой конструкции.

Задача ставится следующим образом: описать частицу, симметрии которой характеризовались бы группой путей  $P$  и которая

имела бы пространственно-временную интерпретацию. Первое требование означает, что в пространстве состояний этой частицы должно действовать представление группы  $P$ . Второе требование означает, что это представление должно быть импримитивным, причем база импримитивности должна совпадать с пространством Минковского  $\mathcal{M}$ . Далее мы замечаем, что пространство  $\mathcal{M}$  как однородное пространство изоморфно фактор-пространству  $P/L$ , где  $L$  — подгруппа петель. С учетом этого импримитивное представление должно быть эквивалентно индуцированному представлению  $U(P) = \alpha(L) \uparrow P$ . Остается выбрать  $\alpha(L)$  и индуцировать его на  $P$ . Сейчас мы произведем индуцирование из того представления  $\alpha(L)$ , которое было найдено в предыдущем параграфе и которое описывает абелево калибровочное или, что то же, электромагнитное поле.

Напомним еще раз, как осуществляется отождествление  $\mathcal{M} = P/L$ . При этом отождествлении одна выделенная точка пространства  $\mathcal{M}$  отождествляется с подгруппой  $L$ , рассматриваемой как класс смежности  $1 \cdot L$ . Этот класс играет в пространстве  $P/L$  роль «начала отсчета». Естественно, хотя и не обязательно, отождествить этот класс с точкой  $O$  — началом отсчета пространства Минковского. Этот выбор будет соответствовать выбору, который был сделан в конце предыдущего параграфа при определении представления  $\alpha(L)$ . Следует подчеркнуть, что такой выбор — не более чем вопрос удобства. Другой выбор привел бы к эквивалентной картине. Итак, полагаем, что точке  $O \in \mathcal{M}$  соответствует класс  $L \in P/L$ . Этим отождествление определяется полностью. Именно, произвольной точке  $x \in \mathcal{M}$  соответствует смежный класс  $x_P L \in P/L$ , где  $x_P$  — элемент группы  $P$ , обладающий свойством  $x_P O = x$ . Все элементы этого смежного класса (и только они) обладают тем свойством, что точку  $O$  переводят в точку  $x$ . Отождествление  $\mathcal{M} = P/L$  понадобится нам при интерпретации индуцированного представления  $\alpha(L) \uparrow P$ . Построим это представление.

Согласно общему определению, сформулированному в § 4, представление  $U(P) = \alpha(L) \uparrow P$  действует в пространстве  $\mathcal{H}$ , векторы которого представляют собой функции  $\Psi(p)$ , удовлетворяющие структурному условию

$$\Psi(pl) = \alpha(l^{-1}) \Psi(p).$$

В данном случае значения функций  $\Psi(p)$  — это просто комплексные числа, так как представление  $\alpha(L)$  одномерно. В пространстве  $\mathcal{H}$  действие оператора  $U(p)$  определено как левый сдвиг:

$$(U(p)\Psi)(p') = \Psi(p^{-1}p').$$

Для физической интерпретации представления  $U$  и пространства  $\mathcal{H}$  удобно перейти к другой реализации этого пространства — реализации функциями на  $\mathcal{M}$ . Для этого требуется продолжить функцию  $l \mapsto \alpha(l)$ , заданную на подгруппе  $L$ , на всю группу  $P$ ,



причем продолжение  $p \mapsto \alpha(p)$  должно удовлетворять условию

$$\alpha(pl) = \alpha(p)\alpha(l) \quad (7.1)$$

для любых  $p \in P$ ,  $l \in L$ . Однако построение представления  $\alpha(L)$ , осуществленное в предыдущем параграфе, подсказывает способ такого продолжения.

Действительно, в нашем распоряжении имеется функция

$$\alpha(p)_{x'}^{x'} = \alpha(p_{x'}^{x'}) = \exp \left\{ ie \int_{p_{x'}^{x'}} A_{\mu}(x) dx^{\mu} \right\}, \quad (7.2)$$

определенная на группоиде  $\hat{P}$  путей с закрепленными концами и осуществляющая представление этого группоида. Представление подгруппы петель строилось из этой функции как  $\alpha(l) = \alpha(l_0) = \alpha(l_0^0)$ . Ясно, что функцию  $\alpha(p)$  с заданными свойствами можно получить, если положить

$$\alpha(p) = \alpha(p)_0^0 = \exp \left\{ ie \int_{p_0^0} A_{\mu}(x) dx^{\mu} \right\}.$$

Здесь начало пути зафиксировано и совпадает с началом отсчета  $O$ , а концом является, очевидно, точка  $x = pO$ . Нетрудно видеть, что определенная таким образом функция  $\alpha(p)$  действительно удовлетворяет соотношению (7.1). Это следует из того, что  $\alpha(p)_{x'}^{x'}$  осуществляет представление группоида и из соотношения  $p_0^0 l_0^0 = (pl)_0^0$ . Это соотношение является частным случаем соотношения (2.2), выражающего отношение гомоморфизма между группоидом  $\hat{P}$  и группой  $P$ . Впрочем, интересующее нас свойство (7.1) легко доказать и непосредственно.

Определенная таким образом функция  $\alpha(p)$  не является представлением группы  $P$ . Действительно, в определение этой функции входит интеграл, который начинается всегда от точки  $O \in \mathcal{M}$ . Это не мешает выполнению соотношения (7.1), так как интегрирование вдоль пути  $l \in L$ , начиная от точки  $O$ , приводит опять в точку  $O$  и если вслед за этим интегрировать от точки  $O$  вдоль пути  $p$ , то получится то же самое, что при интегрировании сразу вдоль пути-произведения  $pl$ . Если же второй сомножитель не является петлей, то это уже не так.

Однако, как отмечалось в § 4, совершенно не обязательно, чтобы функция  $\alpha(p)$  была представлением группы  $P$ . Достаточно, чтобы выполнялось более слабое условие (7.1). Его достаточно, для того чтобы с помощью функции  $\alpha(p)$  перейти от функции на группе  $\Psi(p)$  к функции на пространстве,  $\psi(x)$ . Определяем  $\psi(p) = \alpha(p)\Psi(p)$ , замечаем, что полученная функция постоянна на классах смежности  $pL$  и, следовательно, может рассматриваться как функция от этих классов, т. е. как функция от точек пространства  $\mathcal{M}$ , отождествляемых с этими классами. Для конкретности можно написать

$$\psi(x) = \alpha(x_P)\Psi(x_P),$$

где  $x_p$  — представитель класса  $x$ , т. е. такой путь, который из начала отсчета  $O$  приводит в точку  $x$ . Вместо  $x_p$  здесь можно подставить любой другой путь  $p = x_p l$ , ведущий в ту же точку.

Отображение  $\Psi \mapsto \psi$  взаимно однозначно. Обратное отображение определяется формулой

$$\Psi(p) = [\alpha(p)]^{-1} \psi(pO).$$

Поэтому функции  $\psi: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  можно рассматривать как векторы пространства  $\mathcal{H}$  вместо функций  $\Psi: P \rightarrow \mathbb{C}$ . Чтобы найти закон преобразования этих функций под действием представления  $U(P)$ , достаточно взять закон преобразования функций  $\Psi$  (левый сдвиг) и произвести цепочку преобразований \*):  $\psi \mapsto \Psi \mapsto U(p)\Psi \mapsto U(p)\psi$ . Это дает следующий закон преобразования:

$$(U(p)\psi)(x) = \alpha(x_p) [\alpha(p^{-1}x_p)]^{-1} \psi(p^{-1}x).$$

Можно упростить эту формулу, воспользовавшись определением функции  $\alpha(p)$  через представление группоида и свойством этого представления. Действительно, имеем

$$\alpha(p^{-1}x_p) = \alpha(p^{-1}x_p)_O = \alpha((p^{-1})_x(x_p)_O) = \alpha(p^{-1})_x \alpha(x_p)_O = \alpha(p^{-1})_x \alpha(x_p).$$

Подставляя это выражение в предыдущую формулу, мы видим, что множитель  $\alpha(x_p)$  сокращается. Оставшийся множитель можно упростить, пользуясь еще раз свойствами представления группоида. Это дает

$$(U(p)\psi)(x) = \alpha(p)_{p^{-1}x}^{-1} \psi(p^{-1}x). \quad (7.3)$$

Формула (7.3) показывает, что под действием элемента группы путей  $p \in P$  функция  $\psi(x)$  претерпевает изменения двух типов. Во-первых, ее аргумент сдвигается и превращается в  $x' = p^{-1}x$ . Во-вторых, значение функции подвергается действию оператора  $\alpha(p)_{p^{-1}x}^{-1}$  (в данном случае это просто число, которое находится по формуле (7.2)). Для большей наглядности попытаемся описать оба эти изменения единым образом. Для этого предположим, что путь  $\delta p$  очень короткий. Это означает, во-первых, что вектор  $(\delta p)_{\mathcal{M}} = \Delta a$  (вектор сдвига, соответствующий этому пути) мал по абсолютной величине, а во-вторых, что сам путь мало отличается от прямолинейного, т. е. близок к своему вектору сдвига. В этом случае при нахождении правой части формулы (7.3) можно ограничиться членами первого порядка по  $\Delta a$ , что дает

$$(U(\delta p)\psi)(x) \approx (1 - \Delta a^\mu \nabla_\mu) \psi(x), \quad (7.4)$$

\*) В последнем звене этой цепочки следовало бы использовать какое-то другое обозначение для оператора, действующего на функцию  $\psi$  (например,  $\tilde{U}(p)$ ), но для упрощения мы используем то же самое обозначение. Другими словами, вместо того, чтобы говорить об эквивалентном представлении (как следовало бы), мы говорим о том же самом представлении. Такого рода упрощение принято в физической литературе и не приводит к недоразумениям, потому что обычно видно, на какой объект действует оператор.



где обозначено

$$\nabla_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - ieA_\mu(x).$$

Таким образом, *ковариантная производная* появляется в качестве генератора представления  $U(P)$ . Мы рассмотрели случай очень короткого и почти прямолинейного пути. Однако произвольный путь  $p$  можно представить в виде произведения большого числа коротких и почти прямолинейных путей. Таким способом мы можем даже сдвиг вдоль произвольного пути  $p$  выразить через ковариантную производную. При этом следует с самого начала следить за порядком перемножения коротких путей, являющихся частью длинного пути. Соответствующая упорядоченность сохраняется до самого конца вычисления, в результате чего возникает упорядоченная или  $P$ -экспонента:

$$U(p) = P \exp \left\{ - \int_p \nabla_\mu dx^\mu \right\}. \quad (7.5)$$

Определение  $P$ -экспоненты было дано в § 3 гл. 5. Ниже в связи с неабелевыми представлениями мы поговорим о  $P$ -экспонентах подробнее.

Мы убедились, что *генератором представления  $U(P)$  является ковариантная производная*, точно так же как обычная производная является генератором представления группы трансляций, действующего в пространстве состояний свободных частиц. Мы знаем, что частица с зарядом  $e$ , движущаяся в электромагнитном поле, описывается уравнением, в котором обычные производные заменены на ковариантные. Следовательно, имеются основания, для того чтобы интерпретировать пространство  $\mathcal{H}$  как пространство *локализованных состояний заряженной частицы*. Конечно, для того чтобы утверждать это с уверенностью, необходимо выделить еще подпространство *реальных состояний*. Это будет сделано в гл. 9.

Вернемся еще раз к формуле (7.3). Она несколько напоминает ковариантный закон преобразования (5.4) обычной волновой функции под действием группы Пуанкаре. И аналогия не случайна. Действительно, сам способ построения представления  $U$  подсказывает, что функция  $l \mapsto \alpha(l)$  (а значит, и ее продолжение на всю группу  $p \mapsto \alpha(p)$ ), и представление группоида  $p_x' \mapsto \alpha(p_x')$  описывают *внутренние степени свободы* частицы, т. е. те степени свободы, которыми частица обладает даже в том случае, если ее положение в пространстве-времени  $x \in \mathcal{M}$  фиксировано. Мы приходим, таким образом, к удивительному заключению: описываемое представлением  $\alpha(L)$  *электромагнитное поле есть не что иное, как характеристика внутренних степеней свободы частицы*. Так же, как в случае свободных частиц внутренние (спиновые) степени свободы описывались представлением группы Лоренца,  $\sigma(\Lambda)$ , так в рассматриваемом случае внутренние степени свободы описываются представлением группы петель,  $\alpha(L)$ . Возникающая та-

ким образом интерпретация является неожиданной и кажется многообещающей. Мы привыкли относиться к силовому (в частности, электромагнитному) полю как к некоторому самостоятельному объекту, который определяет движение частиц. Свойства частиц определены совершенно независимо от этого объекта. В данном же подходе поле появляется как характеристика самой частицы. Но важнее, на наш взгляд, другое обстоятельство. Наличие внутренних степеней свободы и их характеристика — это локальные свойства частицы в том смысле, что они имеют смысл даже для частицы, находящейся в одной точке пространства-времени (в виртуальном состоянии, локализованном в точке). А в данном случае оказывается, что полное описание внутренних степеней свободы требует задания электромагнитного поля, вообще говоря, во всем пространстве-времени, т. е. задания некоторого глобального объекта. Вот это *переплетение, перемешивание глобального и локального аспектов в описании частицы* является, возможно, самым интересным в данном подходе. Об этом мы еще поговорим подробнее позднее. А пока рассмотрим более общий тип представления  $\alpha(L)$ , который приведет нас к понятию калибровочного поля. В этом общем случае мы рассмотрим и те вопросы, которые не затрагивали при рассмотрении электромагнитного поля, в частности, вопрос о калибровочной инвариантности.

## § 8. Неабелево калибровочное поле и «калибровочно заряженные» частицы

В двух предыдущих параграфах мы рассмотрели: 1) представление группы петель  $\alpha(L)$ , которое описывает электромагнитное поле; 2) представление группы всех путей  $U(P) = \alpha(L) \uparrow P$ , которое описывает заряженные частицы в электромагнитном поле. В конце концов мы получили ковариантную производную как генератор представления  $U$  группы путей. Теперь естественно попытаться найти другие представления группы петель и выяснить, нет ли способа разумно их интерпретировать. Оказывается, что такие представления есть и, более того, интерпретация их тоже имеется в готовом виде. Это представления упорядоченными экспонентами и соответствующее калибровочное поле.

*Упорядоченные экспоненты*, которые называют также *контурными переменными* или *неинтегрируемыми фазовыми факторами*, сейчас широко используются в калибровочной теории (см., например, работы [151—164]). То новое, что содержится в предлагаемом подходе, — это утверждение, что они образуют представление группы петель и что индуцирование этого представления на группу всех путей приводит к описанию калибровочно заряженных частиц. Эти обстоятельства не были замечены, как, впрочем, и тот факт, что пути, если их соответствующим образом определить, образуют группу. А между тем они позволяют не только получить технические преимущества, применив теоретико-груп-



повую технику, но и глубже проанализировать свойства частиц, движущихся в калибровочных полях. Перейдем к описанию неабелева представления группы петель.

Фактически нам предстоит повторить то, что было проделано в двух предыдущих параграфах, рассматривая более общую ситуацию, когда величины  $A_\mu(x)$  не коммутируют друг с другом. Это приведет к тому, что мы систематически должны будем везде заменять экспоненты на упорядоченные экспоненты или, что то же,  $P$ -экспоненты. Разумеется, это требует большей аккуратности при выкладках и доказательствах. Однако никаких принципиальных отличий это на первых порах не дает. В чем заключаются принципиальные отличия неабелева калибровочного поля, мы увидим позднее.

Итак, пусть для каждого  $x \in \mathcal{M}$  компоненты вектор-потенциала  $A_\mu(x)$  принадлежат некоторой, вообще говоря, некоммутативной алгебре. Из того, что говорилось в гл. 5, ясно, что для описания калибровочного поля эти величины должны иметь вид  $A_\mu(x) = A_\mu^a(x) T_a$ , где  $A_\mu^a(x)$  — уже числа, а  $T_a$  — генераторы некоторого представления калибровочной группы. Сейчас для нас это будет совершенно несущественно, важно лишь, что величины  $A_\mu(x)$  не коммутируют друг с другом. Однако, поскольку мы будем говорить ниже о калибровочно заряженных частицах, отметим уже сейчас, что под «калибровочным зарядом» (название чисто условное) понимается представление калибровочной группы или совокупность генераторов  $T_a$ , которые заменяют собой тот единственный заряд  $e$ , который фигурировал в теории электромагнитного поля \*).

Напомним, что  $P$ -экспонентой называется экспонента от одномерного интеграла, упорядоченная по возрастанию переменной интегрирования, т. е.

$$P \exp \left\{ \int_0^1 d\tau B(\tau) \right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{\Delta\tau B(\tau_N)} e^{\Delta\tau B(\tau_{N-1})} \dots e^{\Delta\tau B(\tau_1)},$$

где  $\Delta\tau = 1/N$ ,  $\tau_k = k/N$ . На основе этого определения легко определить  $P$ -экспоненту от интеграла вдоль кривой:

$$\alpha(\xi) = P \exp \left\{ i \int_{(\xi)} A_\mu(x) dx^\mu \right\} = P \exp \left\{ i \int_0^1 d\tau \dot{\xi}^\mu(\tau) A_\mu(\xi(\tau)) \right\}. \quad (8.1)$$

---

\*) При рассмотрении электромагнитного поля мы могли бы одновременно рассматривать представления, характеризующиеся разными числовыми значениями параметра  $e$ . Это означало бы описание частиц с разными зарядами в одном и том же электромагнитном поле. В неабелевой теории этому соответствует рассмотрение различных представлений одной и той же калибровочной группы.

Можно переписать это определение в несколько ином виде:

$$\alpha\{\xi\} = P \exp \left\{ i \int_{\{\xi\}} A_{\mu}(x) dx^{\mu} \right\} = \\ = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{i A_{\mu}(\xi_N) \Delta \xi_N} e^{i A_{\mu}(\xi_{N-1}) \Delta \xi_{N-1}} \dots e^{i A_{\mu}(\xi_1) \Delta \xi_1}, \quad (8.2)$$

где обозначено  $\xi_k = \xi(k/N)$ ,  $\Delta \xi_k = \xi_k - \xi_{k-1}$ .

Тем самым введена функция  $\{\xi\} \mapsto \alpha\{\xi\}$  на множестве  $P''$  непрерывных кусочно дифференцируемых кривых. Для наших целей требуется, чтобы функция  $\alpha\{\xi\}$  не зависела от параметризации кривой. Это значит, что должно быть  $\alpha\{\xi\} = \alpha\{\xi'\}$  при  $\{\xi'\} \sim \{\xi\}$ , т. е. при  $\xi'(\tau) = \xi(f(\tau))$ . Однако это действительно так, по крайней мере для кусочно гладких функций  $A_{\mu}(x)$ . Далее убеждаемся в справедливости соотношений

$$\alpha(\{\xi'\} \{\xi\}) = \alpha\{\xi'\} \alpha\{\xi\}, \quad \alpha(\{\xi\}^{-1}) = (\alpha\{\xi\})^{-1}.$$

Первое из них почти очевидно (если учесть независимость упорядоченной экспоненты от способа параметризации). Что касается второго, то доказательство его основано на том, что обратная кривая — это та же кривая, проходимая в обратном направлении, а при обращении произведения некоммутирующих сомножителей порядок их умножения меняется на противоположный.

То, что для эквивалентных кривых функция  $\alpha$  имеет одно и то же значение, позволяет рассматривать ее как функцию на фактор-пространстве  $P' = P''/\sim$ . При этом для любых  $(\xi), (\xi') \in P'$  справедливы соотношения

$$\alpha((\xi')(\xi)) = \alpha(\xi') \alpha(\xi), \quad \alpha((\xi)^{-1}) = (\alpha(\xi))^{-1}.$$

Отсюда в свою очередь следует, что  $\alpha((\xi)^{-1}(\xi)) = 1$  и, следовательно, если две кривые отличаются лишь «аппендиксами» вида  $(\xi)^{-1}(\xi)$ , то функция  $\alpha$  на таких кривых имеет одно и то же значение. Другими словами, если ввести на множестве  $P'$  отношение эквивалентности  $\sim$  так, как это описано в § 1, то функцию  $\alpha$  можно рассматривать как функцию на фактор-пространстве  $\hat{P} = P'/\sim$ . Это фактор-пространство — не что иное, как группоид путей с закрепленными концами. Функция

$$\alpha(p_{x'}^{x''}) = P \exp \left\{ i \int_{p_{x'}^{x''}} A_{\mu}(x) dx^{\mu} \right\} \quad (8.3)$$

определяет представление этого группоида, то есть для нее выполняются соотношения

$$\alpha(p_{x'}^{x''} p_x^{x'}) = \alpha(p_{x'}^{x''}) \alpha(p_x^{x'}).$$



Дальше можно действовать буквально так же, как в § 6, и ввести представление группы петель  $L$  по формуле

$$\alpha(l) = \alpha(l_0) = P \exp \left\{ i \int_{l_0} A_\mu(x) dx^\mu \right\}. \quad (8.4)$$

Доказательство того, что это действительно представление, может быть точно таким же, как для коммутативного случая (§ 6), потому что оно основано на изоморфизме между группой  $L$  и подгруппой  $L_0$  группоида  $\hat{P}$ .

Полученное таким образом некоммутативное представление группы петель в простейшем случае (когда  $A_\mu(x)$  — элементы алгебры Ли калибровочной группы, а  $\alpha(l)$  — элементы самой калибровочной группы) описывают *неабелево калибровочное поле*. Так же, как в абелевом случае, операторы  $\alpha(l)$  вместо вектор-потенциала  $A_\mu(x)$  можно выразить через напряженность этого поля  $F_{\mu\nu}(x)$ . Однако в этом случае некоммутативность приводит к существенным техническим трудностям, поэтому этот вопрос будет рассмотрен ниже отдельно (§ 10). Представление  $l \mapsto \alpha(l)$  описывает калибровочное поле адекватно во всех случаях, тогда как описание с помощью напряженности является адекватным лишь в односвязных областях (см. в этой связи работу [153]).

Теперь, следуя общей схеме, мы должны построить индуцированное представление  $U(P) = \alpha(L) \uparrow P$ . Представление  $\alpha(L)$  описывает калибровочное поле, которое в данном подходе интерпретируется как характеристика внутренних степеней свободы частиц. Представление  $U(P)$  описывает саму эту частицу, точнее — ее локальные свойства.

Описание индуцированного представления практически не отличается от того, которое было дано в коммутативном случае. Единственное отличие сводится к тому, что функции, реализующие векторы пространства  $\mathcal{H}$ , должны быть уже не числовыми, а векторнозначными. Чтобы конкретизировать это утверждение, предположим, что  $A_\mu(x)$ , а значит, и  $\alpha(l)$  — это линейные операторы в пространстве  $\mathcal{L}$ . Обычно мы будем предполагать, что  $\mathcal{L}$  — конечномерное пространство, в котором действует представление  $U(G)$  калибровочной группы  $G$  с генераторами  $T_a$ . Тогда  $A_\mu(x) = A_\mu^a(x) T_a \in \text{Alg } U(G)$ ,  $\alpha(l) \in U(G)$ . Операторы  $A_\mu(x)$  и  $\alpha(l)$  действуют в пространстве  $\mathcal{L}$ . В этом случае функции, реализующие векторы пространства  $\mathcal{H}$ , должны иметь значения из пространства  $\mathcal{L}$ .

Как всегда, можно реализовать пространство  $\mathcal{H}$  как пространство функций  $\Psi: P \mapsto \mathcal{L}$ , подчиняющихся структурному условию

$$\Psi(pl) = \alpha(l^{-1}) \Psi(p)$$

для любых  $p \in P$ ,  $l \in L$ . Операторы представления  $U(p)$  определяются в таком пространстве как левые сдвиги:

$$(U(p)\Psi)(p') = \Psi(p^{-1}p').$$

Такая реализация пространства  $\mathcal{H}$  ничем не хуже любой другой. Наоборот, в некоторых отношениях она лучше, и мы еще вернемся к ней в следующем параграфе. Однако для того, чтобы пространственно-временная интерпретация состояний из  $\mathcal{H}$  была наиболее наглядной, удобно перейти к другой реализации — функциями на пространстве Минковского  $\mathcal{M}$ .

Для этого требуется функция  $p \mapsto \alpha(p)$ , которая при ограничении на подгруппу  $L$  совпадает с функцией (8.4) и которая удовлетворяет условию

$$\alpha(pl) = \alpha(p) \alpha(l) \quad (8.5)$$

для любых  $p \in P$ ,  $l \in L$ . Как и в коммутативном случае, определим эту функцию с помощью представления группоида (8.3):

$$\alpha(p) = \alpha(p_0) = P \exp \left\{ i \int_{p_0} A_\mu(x) dx^\mu \right\}.$$

С помощью этой функции перейдем к функции на пространстве Минковского

$$\psi(x) = \alpha(x_p) \Psi(x_p), \quad \Psi(p) = [\alpha(p)]^{-1} \psi(p_0)$$

и найдем закон преобразования этой функции под действием представления:

$$(U(p)\psi)(x) = \alpha(p)_{p^{-1}x}^x \psi(p^{-1}x). \quad (8.6)$$

Из этой формулы видно, что под действием сдвига вдоль пути функция  $\psi(x)$  преобразуется двояким образом: во-первых, сдвигается ее аргумент, и, во-вторых, она подвергается действию оператора  $\alpha(p)_{x'}^x$ . Можно записать оба эти действия единым образом. Это делается так же, как делалось в § 6 для абелева случая. Результатом является представление оператора  $U(p)$  в виде  $P$ -экспоненты:

$$U(p) = P \exp \left\{ - \int_p dx^\mu \nabla_\mu \right\}, \quad (8.7)$$

где введено обозначение для ковариантной производной:

$$(\nabla_\mu \psi)(x) = \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} - i A_\mu(x) \right) \psi(x). \quad (8.8)$$

Существенно, что в формуле (8.7) интегрирование может вестись по любой кривой из класса  $p$ . Концы этой кривой также произвольны. Действительно, экспонента (8.7) сводится к произведению вида

$$U(p) = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-\Delta \xi_{N-1}^\mu \nabla_\mu} \dots e^{-\Delta \xi_1^\mu \nabla_\mu} e^{-\Delta \xi_0^\mu \nabla_\mu},$$

где  $\Delta \xi_k = \xi(\tau_{k+1}) - \xi(\tau_k)$  — векторы сдвига вдоль бесконечно малых (в пределе) участков пути,  $\tau_k = k/N$ . Задание кривой, вдоль которой происходит интегрирование, определяет лишь последовательность бесконечно малых векторов  $\Delta \xi_k$ . Очевидно, последова-



тельность эта не меняется при общем сдвиге кривой  $\{\xi\}$  в пределах одного и того же класса  $p$ .

Таким образом, мы убедились, что генераторами представления  $U(P)$  группы путей являются ковариантные производные. Для свободных частиц генераторами представления группы трансляций являются обычные производные. Поэтому пространство  $\mathcal{H}$ , в котором действует представление  $U$ , можно интерпретировать как пространство локализованных состояний «калибровочно заряженных» частиц, движущихся в калибровочном поле (само калибровочное поле описывается представлением  $\alpha(L)$ ). Как и для свободных частиц, локализованные (в пространстве-времени) состояния из  $\mathcal{H}$  не все могут быть реальными или наблюдаемыми. Они могут появляться лишь в качестве виртуальных состояний, например интерферирующих квантовых альтернатив (см. § 1 гл. 2). Для построения полной теории частиц следует еще построить подпространство *реальных состояний*. Это будет сделано в гл. 9. Пока же мы подробнее исследуем локализованные состояния, образующие пространство  $\mathcal{H}$ , что само по себе нетривиально. Очередной задачей будет проанализировать разницу между формализмом, основанным на функциях  $\Psi(p)$ , и более обычным формализмом, основанным на функциях  $\phi(x)$ .

Получив теоретико-групповую интерпретацию калибровочной теории, мы одновременно приобретаем возможность взглянуть на нее с новой точки зрения. Прежде всего мы видим, что калибровочные преобразования в рассматриваемом подходе вообще могут не появляться. Мы подробнее обсудим это в следующем параграфе, однако уже сейчас ясно, что это позволяет считать группу калибровочных преобразований не столь фундаментальной, как это казалось до сих пор.

Еще более важно, что калибровочная группа  $G$  не должна теперь постулироваться как некоторая внутренняя симметрия. Вместо этого следует постулировать в качестве группы симметрии группу путей. Это физически более привлекательно, потому что последняя характеризует пространственно-временные отношения, и это позволяет ожидать, что она является фундаментальной. Постулировав группу путей, мы немедленно и уже автоматически убеждаемся, что внутренние степени свободы частиц должны описываться различными представлениями  $\alpha(L)$  подгруппы петель. При этом априори нет никаких ограничений на выбор этих представлений, кроме унитарности. Значит, можно ожидать, что по крайней мере все унитарные конечномерные представления могут реализоваться в природе. Но если теперь вспомнить, что величины  $\alpha(l)$ ,  $l \in L$ , отождествляются с элементами калибровочной группы  $G$ , то с неизбежностью приходится сделать вывод, что в качестве  $G$  в природе может встретиться любая группа унитарных матриц  $U(n)$ . Даже более того, было бы естественно, чтобы все  $U(n)$  реализовывались, т. е. чтобы в природе осуществлялась иерархия унитарных симметрий возрастающих размерностей.

## § 9. Калибровочные преобразования с точки зрения группы путей

В этом параграфе мы поговорим о двух способах реализации векторов из пространства  $\mathcal{H}$ . Первый способ — это реализация их функциями  $\psi: M \rightarrow \mathcal{L}$ . Он ближе к формализму, применяемому обычно в квантовой теории поля. Состояние частицы описывается в этом случае функцией на пространстве Минковского, и по этой функции можно судить о том, в какой области пространства Минковского находится частица (более точно — какова амплитуда вероятности нахождения частицы в каждой точке этого пространства). Второй способ реализации вектора из  $\mathcal{H}$  — это функция  $\Psi: P \rightarrow \mathcal{L}$ . В этом случае состояние описывается не функцией от точки, а функцией от пути, ведущего в эту точку (путь  $p$  вместо точки  $x = pO$ ). Правда, на функции  $\Psi$  накладывается дополнительное структурное условие, так что по существу эти функции содержат столько же информации, сколько и функции  $\psi$  (описывают те же степени свободы). На первый взгляд кажется, что этот формализм во всех отношениях хуже. Однако оказывается, что он обладает одним достоинством, которое можно сформулировать как инвариантность этого формализма относительно калибровочных преобразований.

Формализм, в котором волновые функции частиц или, иначе, физические поля, зависят не от точек, а от путей, ведущих в эти точки, был предложен впервые Мандельштамом [146, 147, 149, 150]. В §§ 1, 2 было показано, что пути можно определить таким образом, что они образуют группу. Поэтому для построения путевого формализма можно применить стандартную теоретико-групповую технику. Мы использовали теорию индуцированных представлений и получили путеязависимые функции в связи с индуцированным представлением  $U$  группы путей. Теперь будет нетрудно убедиться, что получившийся путеязависимый формализм ( $\Psi(p)$ ) не зависит от выбора вектор-потенциала  $A_\mu$ , если только калибровочное поле фиксировано. В отличие от этого обычный локальный формализм ( $\psi(x)$ ) зависит от выбора потенциала, т. е. не инвариантен относительно калибровочного преобразования.

Напомним, каким образом мы получили представление  $U(P)$ . Был задан вектор-потенциал  $A_\mu(x)$ . Затем по нему было построено представление группоиды закрепленных путей  $\alpha(p_x')$ , и затем представление группы петель  $\alpha(L)$ . После этого представление  $U$  получается индуцированием,  $\alpha(L) \uparrow P = U(P)$ , а функции  $\Psi(p)$  реализуют пространство  $\mathcal{H}$ , в котором это представление действует. Нетрудно видеть, что в конечном счете представление  $U$ , пространство  $\mathcal{H}$  и его реализация функциями  $\Psi(p)$  полностью определяются заданием представления  $\alpha(L)$ . А потенциал  $A_\mu(x)$  и связанное с ним представление группоиды  $\alpha(p_x')$  являются величинами вспомогательными и непосредственно в этом формализме не фигурируют. Из этого следует, что если перейти от



потенциала  $A_\mu$  к некоторому новому потенциалу  $A'_\mu$  так, чтобы представление  $\alpha(L)$  при этом осталось неизменным, то в формализме  $(U, \mathcal{H}, \Psi(p))$  ничего не изменится. Замена  $A_\mu \rightarrow A'_\mu$ , при которой  $\alpha'(L) = \alpha(L)$ , называется *калибровочным преобразованием*. Поэтому можно сказать, что путезависимый формализм  $(U, \mathcal{H}, \Psi(p))$  является калибровочно инвариантным.

**З а м е ч а н и я.** 1) Следует уточнить, что понимается под равенством двух представлений  $\alpha'(L) = \alpha(L)$ . Если это означает, что  $\alpha'(l) = \alpha(l)$  для всех  $l \in L$ , т. е. представления совпадают, то в путезависимом формализме действительно ровно ничего не меняется, в том числе каждая функция  $\Psi(p)$  остается неизменной. Если же равенство означает лишь эквивалентность представлений (а именно так обычно понимают равенство двух представлений), т. е.  $\alpha'(l) = C\alpha(l)C^{-1}$ , то получающиеся индуцированные представления  $U$  и  $U'$  также эквивалентны, а функция  $\Psi(p)$  меняется на  $\Psi'(p) = C\Psi(p)$ . Это, однако, изменение несущественное, так как оператор  $C$  не зависит от  $p$ . В такой ситуации мы также будем говорить о калибровочной инвариантности формализма.

2) Обычно калибровочным преобразованием называют такое изменение вектор-потенциала, при котором напряженность калибровочного поля меняется ковариантно,  $F'_{\mu\nu}(x) = V(x)F_{\mu\nu}(x)V^{-1}(x)$ . Однако более правильно определять его так, как это сделано выше. В односвязной области эти определения совпадают.

Рассмотрим калибровочное преобразование подробнее. Основной задачей для нас будет вывести закон преобразования волновых функций  $\psi(x)$  при калибровочном преобразовании. Пусть потенциал  $A_\mu(x)$  переходит в  $A'_\mu(x)$ . Подставляя новый потенциал в упорядоченную экспоненту (8.3), мы получим вместо  $\alpha(p)_x^{x'}$  новую функцию  $\alpha'(p)_x^{x'}$ , которая так же, как и старая, образует представление группоида  $\hat{P}$ . Полагаем  $\alpha'(p) = \alpha'(p)_o$  и, в частности,  $\alpha'(l) = \alpha'(l)_o$  для  $l \in L$ . По определению калибровочного преобразования,

$$\alpha'(l) = C\alpha(l)C^{-1}, \quad (9.1)$$

где  $C$  — некоторый невырожденный оператор в  $\mathcal{L}$ . Однако функция  $\alpha'(p)$  не связана аналогичным условием.

Обратимся к индуцированным представлениям  $U$  и  $U' = \alpha'(L) \uparrow P$ . Первое из них действует в пространстве функций  $\Psi(p)$ , удовлетворяющих структурному условию  $\Psi(pl) = \alpha(l^{-1})\Psi(p)$ . Нетрудно видеть, что функция  $\Psi'(p) = C\Psi(p)$  удовлетворяет условию  $\Psi'(pl) = \alpha'(l^{-1})\Psi'(p)$  и, следовательно, принадлежит тому пространству, в котором действует второе представление,  $U'$ . Таким образом, пространства  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{H}'$  связаны преобразованием  $\Psi \rightarrow \Psi'$ , где

$$\Psi'(p) = C\Psi(p), \quad (9.2)$$

и представления  $U$  и  $U'$  эквивалентны.

Теперь перейдем к функциям, зависящим от точки. Для исходного потенциала такая функция определялась формулой  $\psi(x) = \alpha(x_P)\Psi(x_P)$ . Для нового потенциала мы получим функцию  $\psi'(x) = \alpha'(x_P)\Psi'(x_P)$ . Используя закон преобразования (9.2), можно выразить  $\psi'$  через  $\psi$  следующим образом:

$$\psi'(x) = V(x)\psi(x), \quad (9.3)$$

где обозначено

$$V(x) = \alpha'(x_P)C[\alpha(x_P)]^{-1}. \quad (9.4)$$

По построению  $x_P$  — это любой путь, ведущий из точки  $O$  в точку  $x$ . Нетрудно убедиться, что в силу условия (9.1) оператор  $V(x)$  и в самом деле не зависит от того, какой из этих путей мы выберем для его определения: замена  $x_P \mapsto x_P l$  не меняет выражения (9.4).

Таким образом, при калибровочном преобразовании потенциал  $A_\mu$  переходит в  $A'_\mu$  (при дополнительном условии (9.1)), а волновая функция  $\psi$  — в функцию  $\psi'$ , в соответствии с формулой (9.3). Нам осталось выразить связь между этими двумя преобразованиями более явным образом. Для этого продифференцируем по  $x^\mu$  равенство (9.4). Непосредственное дифференцирование вызывает затруднения, и удобнее сначала найти  $V(x + \Delta a)$ , считая  $\Delta a$  малым и удерживая лишь члены первого порядка. Коэффициенты при  $\Delta a^\mu$  и будут представлять собой производные. При вычислении  $V(x + \Delta a)$  воспользуемся тем, что в формулу (9.4) можно подставлять любой путь, ведущий в интересующую нас точку. В точку  $x + \Delta a$  ведет путь  $\Delta a_P x_P$ , где путь  $\Delta a_P$  можно выбрать в виде отрезка прямой. Тогда с точностью до первого порядка по  $\Delta a$  имеем

$$\begin{aligned} \alpha(\Delta a_P x_P) &= e^{iA_\mu(x)\Delta a^\mu} \alpha(x_P), \\ \alpha'(\Delta a_P x_P) &= e^{iA'_\mu(x)\Delta a^\mu} \alpha'(x_P). \end{aligned}$$

С помощью этих выражений и формулы (9.4), записанной для  $x + \Delta a$ , легко получаем с точностью до первого порядка по  $\Delta a$

$$V(x + \Delta a) = e^{iA'_\mu(x)\Delta a^\mu} V(x) e^{-iA_\mu(x)\Delta a^\mu}.$$

Разлагая обе части по степеням  $\Delta a$  и приравнявая коэффициенты при  $\Delta a^\mu$ , получим

$$V_{,\mu} = iA'_\mu V - iV A_\mu.$$

Удобно записать это уравнение в виде

$$A'_\mu = V A_\mu V^{-1} - iV_{,\mu} V^{-1} \quad (9.5)$$

(индекс с запятой здесь означает дифференцирование по  $x^\mu$ ).

До сих пор мы предполагали, что задано преобразование потенциала  $A_\mu \rightarrow A'_\mu$ , удовлетворяющее условию (9.1) (т. е. калибровочное), и искали функцию  $V(x)$ , определяющую преобразование волновой функции заряженной частицы. Однако проще поступать



как раз наоборот: произвольным образом задать функцию  $V(x)$ , значениями которой являются операторы в пространстве  $\mathcal{L}$ , и по ней найти новый потенциал  $A'_\mu$  с помощью формулы (9.5). Нетрудно непосредственно показать, что найденный таким образом потенциал  $A'_\mu$  определяет такое представление  $\alpha'(L)$ , которое связано с исходным представлением  $\alpha(L)$  формулой (9.1). Для этого нужно переписать равенство (9.5) в виде

$$e^{iA'_\mu(\xi)\Delta\xi^\mu} = V(\xi + \Delta\xi) e^{iA_\mu(\xi)\Delta\xi} V^{-1}(\xi)$$

и использовать это выражение (справедливое с точностью до первого порядка по  $\Delta\xi$ ) при вычислении  $\alpha'(p)_{x'}^x$  как упорядоченной экспоненты (по формулам (8.3), (8.2)). Это дает

$$\alpha'(p)_{x'}^x = V(x') \alpha(p)_{x'}^x V^{-1}(x) \quad (9.6)$$

(это уже точное выражение). Подставляя  $x=0$ ,  $p=l \notin L$ , нетрудно убедиться, что представление  $\alpha'(l) = \alpha'(l)_0$  удовлетворяет условию (9.1), причем  $C=V(0)$ . Операторнозначную функцию, определяющую калибровочное преобразование, будем называть *фазовой функцией*.

Подведем итоги. Мы рассмотрели преобразование вектор-потенциала  $A_\mu \rightarrow A'_\mu$ , при котором представление  $\alpha(L)$  переходит в эквивалентное,  $\alpha'(l) = C \alpha(l) C^{-1}$  (т. е. калибровочное поле как физический объект не меняется). Это преобразование называется калибровочным. Было показано, что при калибровочном преобразовании индуцированное представление  $U(P)$  переходит в эквивалентное. Волновые функции, зависящие от путей, преобразуются при этом тривиальным образом:  $\Psi'(p) = C \Psi(p)$ , а локальные волновые функции подвергаются нетривиальному преобразованию  $\psi'(x) = V(x) \psi(x)$ . Фазовая функция  $V(x)$ , значения которой являются операторами в  $\mathcal{L}$ , связана с потенциалами  $A_\mu$  и  $A'_\mu$  формулами (9.4), (9.5). Последняя из них позволяет по любой наперед заданной фазовой функции  $V(x)$  и потенциалу  $A_\mu$  найти новый потенциал  $A'_\mu$ . Это значит, что можно перебрать все калибровочные преобразования, просто перебирая все возможные фазовые функции  $V(x)$ .

Полученные результаты можно прокомментировать следующим образом. С точки зрения группы путей калибровочные преобразования — это вещь просто излишняя, так как в «правильном» формализме, основанном на путезависимых функциях  $\Psi(p)$ , никакого калибровочного произвола нет. *Калибровочный произвол появляется, когда мы пользуемся «неправильным», неадекватным локальным формализмом*, с локальными волновыми функциями  $\psi(x)$ . Неадекватность, нековариантность с точки зрения группы путей этого формализма проявляется в том, что невозможно найти такое расширение функции  $l \mapsto \alpha(l)$  на всю группу  $P$ , которое было бы представлением группы  $P$ . Если бы это было

возможно, то возможно было бы «ковариантное» описание индуцированного представления  $U$  даже в терминах локальных функций  $\psi(x)$  (см. по этому поводу § 4).

С другой стороны, с развиваемой точки зрения становится понятной и важная роль, которую исторически сыграли группа калибровочных преобразований и калибровочная инвариантность. В квантовой теории поля использовался только локальный формализм, т. е. функции на пространстве Минковского,  $\psi(x)$ . И когда теория впервые столкнулась с объектами, для которых этот формализм является неадекватным, группа калибровочных преобразований оказалась инструментом, который выявляет эту неадекватность, а следовательно, позволяет устранить связанные с ней трудности.

Тем не менее из сказанного следует, по нашему мнению, сделать вывод, что в калибровочной теории (а также, как мы увидим, в гравитации) следует пользоваться именно формализмом путей. По-видимому (в гл. 8 мы попытаемся это подтвердить), лишь в некоторых простейших ситуациях неадекватность локального формализма можно компенсировать калибровочными преобразованиями или другими искусственными приемами. *Есть такие физические системы, в которых нелокальность, описываемая формализмом путей, становится физически существенной и не может быть компенсирована.*

## § 10. Теорема Стокса и напряженность калибровочного поля

В абелевой калибровочной теории (т. е. в электродинамике) представление группы петель  $\alpha(L)$  может быть выражено не только через вектор-потенциал  $A_\mu(x)$ , но и через *напряженность поля*:

$$F_{\mu\nu}(x) = A_{\nu,\mu}(x) - A_{\mu,\nu}(x).$$

Эта возможность основана на том, что интеграл вдоль замкнутой кривой может быть записан как интеграл по поверхности, натянутой на эту кривую:

$$\int_{\partial\Sigma} A_\mu dx^\mu = \frac{1}{2} \int_\Sigma F_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu}, \quad (10.1)$$

где  $d\sigma^{\mu\nu}$  — элемент 2-мерной поверхности, а  $\partial\Sigma$  означает границу поверхности  $\Sigma$ . Эта формула называется *формулой Стокса*. Она позволяет записать

$$\alpha(l) = \exp i e \int_{l_0^0}^l A_\mu dx^\mu = \exp i e \int_\Sigma F_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu},$$

так что представление  $\alpha(L)$  выражается только через напряженность поля  $F_{\mu\nu}$ . Это имеет то преимущество, что калибровочная инвариантность функции  $\alpha(l)$  становится очевидной в силу калибровочной инвариантности напряженности поля.



Разумеется, было бы желательно ввести понятие напряженности поля также и в неабелевой калибровочной теории, а также выразить неабелевы операторы  $\alpha(l)$  через напряженность. Этим мы и займемся в настоящем параграфе.

Прежде всего посмотрим, как выводится формула Стокса в абелевой теории. Для этого разобьем поверхность  $\Sigma$  на большое число частей  $\delta\Sigma_j$ , каждая из которых имеет малую площадь (рис. 14), и интеграл по границе поверхности  $\partial\Sigma$  представим как сумму интегралов по границам этих частей,  $\partial(\delta\Sigma_j)$ :

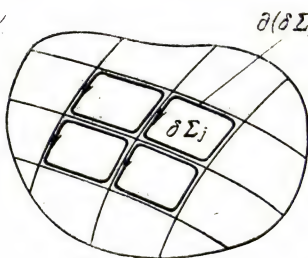


Рис. 14.

$$\int_{\partial\Sigma} A_\mu dx^\mu = \sum_j \int_{\partial(\delta\Sigma_j)} A_\mu dx^\mu.$$

Теперь представим себе, что число частей, на которые разбивается поверхность, неограниченно увеличивается, а площадь каждой части стремится к нулю. Чтобы доказать формулу Стокса (10.1), остается показать, что интеграл по границе маленькой площадки пред-

ставляется в виде  $\frac{1}{2} F_{\mu\nu}(x) \delta z^{\mu\nu}$ . Рассмотрим лишь случай площадки  $\delta\Sigma$ , имеющей форму параллелограмма со сторонами  $\delta_1 x$ ,  $\delta_2 x$ . В этом случае

$$\delta z^{\mu\nu} = \delta_1 x^\mu \delta_2 x^\nu - \delta_1 x^\nu \delta_2 x^\mu.$$

Нам требуется найти интеграл вдоль границы параллелограмма, причем вычисления требуется проводить с точностью до членов, квадратичных по размерам параллелограмма. Сначала вычислим интеграл вдоль отрезка прямой. Пусть отрезок начинается в точке  $a$  и кончается в точке  $a'$ , а разность между этими точками равна  $a' - a = \delta a$ . Для вычисления интеграла введем любую (гладкую) параметризацию этого отрезка, например  $x(\tau) = \tau \delta a + a$ , и запишем интеграл в виде

$$\int_a^{a'} A_\mu(x) dx^\mu = \int_0^1 d\tau \dot{x}^\mu(\tau) A_\mu(x(\tau)).$$

Чтобы получить выражение для этого интеграла с точностью до второго порядка по  $\delta a$ , разложим функцию  $A_\mu(x(\tau))$  в ряд Тейлора по  $\tau$  и сохраним лишь члены до первого порядка. В результате нетрудно получить выражение  $\delta a^\mu \left( A_\mu(a) + \frac{1}{2} \delta a^\nu A_{\mu,\nu}(a) \right)$ , что с точностью до членов второго порядка равно

$$\int_a^{a'} A_\mu(x) dx^\mu = \delta a^\mu A_\mu \left( \frac{1}{2} (a + a') \right) + O(\delta a^3).$$

Справа здесь стоит функция  $A_\mu(x)$  в середине интервала  $x = \frac{1}{2}(a + a')$ . Это выражение позволяет легко найти (с точностью до второго порядка) интеграл по границе параллелограмма  $\delta\Sigma$  со сторонами  $\delta_1 x$ ,  $\delta_2 x$ . Если интегрирование начинается от вершины  $x$  и идет сначала вдоль стороны  $\delta_1 x$ , то

$$\int_{\delta\Sigma} A_\mu dx^\mu = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(x) \delta z^{\mu\nu},$$

что и завершает доказательство теоремы Стокса в абелевом случае.

В абелевом случае теорема Стокса (10.1) была основана на том, что интеграл по границе поверхности  $\Sigma$  можно было представить в виде суммы интегралов по границам маленьких площадок  $\delta\Sigma_j$ , на которые разбивается поверхность  $\Sigma$ . В случае, если величины  $A_\mu(x)$  не коммутируют, можно, конечно, сделать то же самое. Однако мы видели, что в калибровочной теории применяется не сам интеграл  $\int A_\mu dx^\mu$ , а упорядоченная экспонента от этого интеграла

$$\alpha(p_{x'}^{x'}) = P \exp \left\{ i \int_{p_{x'}^{x'}} A_\mu(x) dx^\mu \right\}.$$

В частности, замкнутым кривым, начинающимся в точке  $O$ , сопоставляются экспоненты

$$\alpha(l) = \alpha(l_0) = P \exp \left\{ i \int_{l_0} A_\mu(x) dx^\mu \right\},$$

образующие представление группы петель  $L$ . Поэтому аналог теоремы Стокса, который мог бы быть полезен в неабелевой калибровочной теории, должен формулироваться в терминах самих упорядоченных экспонент и не может быть выражен лишь через интегралы, являющиеся аргументами экспонент.

Следовательно, вместо аддитивных операций с интегралами вдоль кривых мы должны обратиться к мультипликативным операциям с экспонентами от этих интегралов. Но упорядоченные экспоненты как раз обладают подходящим мультипликативным свойством — свойством представления. Именно, экспоненты  $\alpha(p_{x'}^{x'})$  образуют представление группоида путей, а экспоненты  $\alpha(l)$  образуют представление группы замкнутых путей (петель). При этом имеет место соотношение

$$\alpha(p_{x'}^{-1x'}) \alpha(p_{x'}^{x'}) = 1, \quad (10.2)$$

которое совершенно аналогично одному важному свойству интеграла вдоль кривой: сумма интеграла вдоль любой кривой и интеграла вдоль той же кривой, но в обратном направлении, равна нулю. Именно это свойство играло роль, когда мы интеграл по границе поверхности представляли в виде суммы интегралов по



границам ее частей. При этом интегралы по границам смежных частей встречались дважды, но с разным направлением интегрирования. Поэтому они взаимно уничтожались, и оставались лишь интегралы по самым внешним границам частей  $\delta\Sigma_j$ . Нетрудно видеть, что свойство (10.2) упорядоченных экспонент можно использовать аналогичным образом. Это свойство означает, что интегрирование вдоль некоторой кривой (в смысле упорядоченной экспоненты) уничтожается, если вслед за этим та же кривая проходится в обратном направлении. Если пройти по некоторой кривой и затем вернуться по ней же, то возвращение «зачеркивает» первое прохождение.



Рис. 15.

После сказанного ясно, как следует подходить к формулировке аналога теоремы Стокса в неабелевой калибровочной теории. Пусть дана некоторая петля  $l \in L$ . Ей сопоставляется оператор  $\alpha(l)$ , являющийся аналогом интеграла вдоль кривой. Чтобы превратить его в интеграл по площади, представим петлю  $l$  в виде произведения большого числа петель:

$$l = P \prod_j \delta l_j.$$

Значок  $P$  перед произведением напоминает, что порядок сомножителей безразличен. Лишь при определенном порядке правая часть равенства равна левой. Для наших целей требуется, чтобы каждая петля  $\delta l_j$  охватывала очень маленькую площадку  $\delta\Sigma_j$ . Площадка должна быть мала не только по площади, но и по диаметру. Поэтому петля не может быть длинной и узкой. Вместо этого она должна иметь вид лассо, т. е.

$$\delta l_j = p_j^{-1} \delta \lambda_j p_j,$$

где  $\delta \lambda_j \in L$  — петля очень малого диаметра. Типичное лассо изображено на рис. 15. Таким образом, получаем разложение

$$l = P \prod_j (p_j^{-1} \delta \lambda_j p_j). \quad (10.3)$$

Каждую петлю можно разложить в произведение большого количества лассо так, что петли  $\delta \lambda_j$ , входящие в состав лассо, будут иметь очень малые диаметры. Это можно сделать разными способами. Один из способов продемонстрирован на рис. 16. Каждый раз обход вдоль очередного лассо возвращает нас в исходную точку (пусть это будет точка  $O$ ). Начиная вычерчивать от этой точки следующее лассо, мы зачеркиваем часть предыдущего лассо. Это зачеркивание и приводит к тому, что в конце концов все произведение равно внешней петле, охватывающей всю область  $\Sigma$ .

Применяя к произведению (10.3) мультипликативное свойство представления группы, мы имеем

$$\alpha(l) = P \prod_j \alpha(p_j^{-1} \delta \lambda_j p_j).$$

Используя еще свойство представления группоида, получим

$$\alpha(l) = P \prod_j [\alpha(p_j)]^{-1} \alpha(\delta \lambda_j) \alpha(p_j). \quad (10.4)$$

Здесь  $p_j$  — путь, ведущий в точку  $x_j$  (из точки  $O$ ), а через  $\delta \lambda_j$  обозначена петля в точке  $x_j$ , т. е.  $\delta \lambda_j = (\delta \lambda_j)_{x_j}$ . Значок  $P$  напоминает, что произведение следует брать в определенном порядке, соответствующем порядку в произведении (10.3).

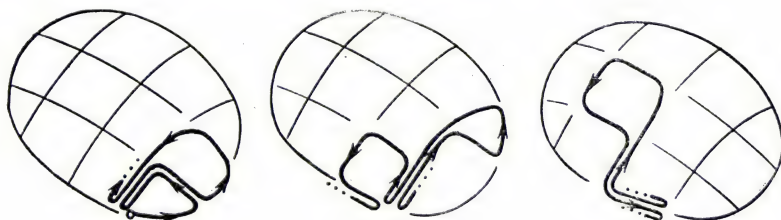


Рис. 16.

Задача теперь сводится к тому, чтобы рассмотреть упорядоченную экспоненту вдоль очень малой петли  $\alpha(\delta \lambda_j)$ , причем интегрирование должно начинаться в точке  $x_j$ . Можно думать, что такая экспонента выразится через площадь области  $\delta \Sigma_j$ . Если мы получим выражение

$$\alpha(\delta \lambda)_x = e^{\frac{1}{2} i F_{\mu\nu}(x) \delta \sigma^{\mu\nu}} + O(\text{diam } \delta \lambda)^3, \quad (10.5)$$

где  $\delta \sigma^{\mu\nu}$  — элемент площади, соответствующий площадке внутри  $\delta \lambda_x$ , то функция  $F_{\mu\nu}(x)$  будет играть роль напряженности калибровочного поля, а формула (10.4) после перехода к пределу, когда площадки  $\delta \Sigma_j$  уменьшаются, превратится в формулу Стокса. Докажем (10.5) для площадки, имеющей форму параллелограмма.

Рассмотрим сначала упорядоченную экспоненту от интеграла вдоль короткого прямолинейного отрезка  $(a, a')$ . Расчет будем вести с точностью до второго порядка по  $\Delta a = a' - a$ . Для этого расчета удобно воспользоваться разложением упорядоченной экспоненты в ряд [9]. Это делается так. Следует разложить экспоненту в ряд так, как будто бы это была обычная экспонента от одномерного интеграла. Тогда член  $n$ -го порядка в разложении будет представлять собой  $n$ -кратный интеграл. Каждый из таких интегралов следует упорядочить по величинам переменных интегрирования. Это значит, что операторы, зависящие от параметров, следует расположить в порядке возрастания значений



параметров. Это и есть результат разложения упорядоченной экспоненты. Другими словами, на промежуточных этапах вычислений с упорядоченной экспонентой можно обращаться как с обычной экспонентой от коммутирующих величин, не обращая внимания на порядок перемножения этих величин. И лишь в последний момент обязательно расположить все эти величины в соответствии с величинами параметров, от которых они зависят. Для разложения экспоненты получаем

$$P \exp \int_0^1 d\tau B(\tau) = 1 + \int_0^1 d\tau B(\tau) + \frac{1}{2} \int_0^1 d\tau \int_0^1 d\tau' PB(\tau) B(\tau') + \dots,$$

где обозначено

$$PB(\tau) B(\tau') = \theta(\tau - \tau') B(\tau) B(\tau') + \theta(\tau' - \tau) B(\tau') B(\tau).$$

Применяя эту формулу для интеграла  $\int_a^{a'} A_\mu dx^\mu$  вдоль короткого прямолинейного отрезка, а в остальном производа вычисления так же, как в коммутативном случае, получим

$$P \exp \left\{ i \int_a^{a'} A_\mu(x) dx^\mu \right\} = e^{i \Delta a^\mu A_\mu \left( \frac{1}{2} (a + a') \right)} + O(\Delta a^3). \quad (10.6)$$

Теперь уже не представляет труда найти упорядоченную экспоненту  $\alpha(\delta\lambda_x)$ , где петля  $\delta\lambda_x$  — это граница параллелограмма с вершиной  $x$  и сторонами  $\delta_1 x$ ,  $\delta_2 x$ . Сопоставляя каждой стороне параллелограмма выражение типа (10.6), перемножая их в соответствующем порядке и преобразуя результат с точностью до квадратичных членов, получим в самом деле выражение (10.5), причем  $\delta\sigma^{\mu\nu} = \delta_1 x^\mu \delta_2 x^\nu - \delta_1 x^\nu \delta_2 x^\mu$ , а функция  $F_{\mu\nu}(x)$  определяется через потенциал формулой

$$F_{\mu\nu}(x) = A_{\nu, \mu}(x) - A_{\mu, \nu}(x) - i [A_\mu(x), A_\nu(x)] \quad (10.7)$$

(квадратными скобками обозначен коммутатор двух операторов).

Функция  $F_{\mu\nu}(x)$ , определяемая формулой (10.7), играет в неабелевой калибровочной теории роль *напряженности поля*. Однако, сравнивая формулы (10.4) и (10.5), мы видим, что в неабелев вариант теоремы Стокса входит не сама эта функция, а функция, зависящая от путей:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(p) = [\alpha(p)]^{-1} F_{\mu\nu}(pO) \alpha(p). \quad (10.8)$$

С помощью этой функции от путей неабелевую форму теоремы Стокса можно переписать в виде

$$\alpha(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} P \prod_j e^{i \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu}(p_j) \delta\sigma_j^{\mu\nu}}. \quad (10.9)$$

Здесь  $\delta\sigma_j^{\mu\nu}$  — элемент площади, лежащий внутри петли  $\delta\hat{\lambda}_j$ , петля эта начинается в точке  $x_j = p_j O$ , в пределе  $N \rightarrow \infty$  диаметры таких петель стремятся к нулю, а выбор  $p_j$  и  $\delta\hat{\lambda}_j$  соответствует факторизации петли  $l$  в произведение лассо:

$$l = \lim_{N \rightarrow \infty} P \prod_j (p_j^{-1} \delta\hat{\lambda}_j p_j). \quad (10.10)$$

Правую часть формулы (10.9) при желании можно назвать *упорядоченной экспонентой от двумерного интеграла*. Тогда равенство (10.9) можно записать в форме, которая подчеркивает аналогию с теоремой Стокса:

$$P \exp \left\{ i \int_{\partial \Sigma} A_\mu(x) dx^\mu \right\} = P \exp \left\{ i \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \mathcal{F}_{\mu\nu}(p) d\sigma^{\mu\nu} \right\}. \quad (10.11)$$

Здесь левая часть — это обычная упорядоченная экспонента, соответствующая интегралу вдоль замкнутого контура,  $l_0 = \partial \Sigma$ , а правая часть по определению равна пределу (10.9). При этом, если мы хотим, чтобы это выражение можно было интерпретировать как интеграл по поверхности  $\Sigma$ , следует выбрать факторизацию (10.10) так, чтобы каждое из входящих в нее лассо лежало целиком в  $\Sigma$  (и разбивало эту поверхность на бесконечно малые площадки  $\delta\Sigma_j$  с границами  $\delta\hat{\lambda}_j$ ). Пути  $p_j$ , следовательно, тоже целиком лежат на поверхности  $\Sigma$  и образуют на ней гладкое семейство (рис. 17).

Корректность определения двумерного интеграла состоит в том, что его величина не зависит от того, как выбрана факторизация петли (10.10), лежащая на данной поверхности  $\Sigma$ . На самом деле одно и то же значение получается и для факторизаций, лежащих на разных поверхностях, если только они имеют общую границу  $\partial \Sigma_1 = \partial \Sigma_2 = l_0$ . Это и не удивительно, так как все построение сводилось, собственно говоря, к анализу выражения  $\alpha(l)$ , которое зависит только от петли  $l \in L$ . Можно то же самое выразить несколько иначе, сказав, что данное определение неабелева двумерного интеграла корректно (т. е. не зависит от факторизации (10.10)) только в том случае, если форма  $\mathcal{F}_{\mu\nu}(p)$  выражается с помощью формул (10.8), (10.7) через некоторую функцию  $A_\mu(x)$ . Для произвольной же функции  $H_{\mu\nu}(x)$  или  $\mathcal{H}_{\mu\nu}(p)$  такое определение некорректно, т. е. зависит от способа факторизации петли (разбиения поверхности).

Обычно напряженностью калибровочного поля называют функцию  $F_{\mu\nu}(x)$ , определенную формулой (10.7). Она зависит от точки пространства Минковского. Нетрудно непосредственно проверить,

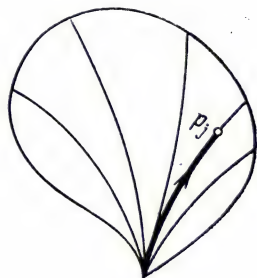


Рис. 17.



что при калибровочных преобразованиях она преобразуется следующим образом:

$$F'_{\mu\nu}(x) = V(x) F_{\mu\nu}(x) V^{-1}(x). \quad (10.12)$$

Такой закон преобразования имеют в виду, когда говорят, что напряженность *преобразуется* при калибровочных преобразованиях *ковариантно*. Однако мы видим, что в путезависимом формализме более естественно возникает другая форма *напряженности*, выражающаяся *функцией от пути*  $\mathcal{F}_{\mu\nu}(p)$ . Нетрудно проверить, что она удовлетворяет структурному условию

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(pl) = \alpha(l^{-1}) \mathcal{F}_{\mu\nu}(p) \alpha(l). \quad (10.13)$$

Если учесть, что оператор, описывающий калибровочное преобразование, равен  $V(x) = \alpha'(p) C[\alpha(p)]^{-1}$ , то нетрудно убедиться, что при калибровочном преобразовании *путезависимая напряженность* преобразуется как

$$\mathcal{F}'_{\mu\nu}(p) = C \mathcal{F}_{\mu\nu}(p) C^{-1}. \quad (10.14)$$

**З а м е ч а н и е.** Поскольку путезависимые функции  $\mathcal{F}_{\mu\nu}(p)$  удовлетворяют структурному условию (10.13), их можно интерпретировать как векторы пространства-носителя индуцированного представления  $U_F(P) = \alpha_F(L) \uparrow P$ . Для этого достаточно положить  $\alpha_F = \alpha \otimes \tilde{\alpha}$ , где  $\tilde{\alpha}(l) = [\alpha(l^{-1})]^T$ . Под действием операторов  $U_F(p)$  функции  $\mathcal{F}_{\mu\nu}(p)$  преобразуются, как всегда, левым сдвигом. Если перейти к локальным функциям  $F_{\mu\nu}(x)$ , то нетрудно доказать, что их преобразование генерируется ковариантными производными, которые в данном случае имеют вид

$$\nabla_\lambda F_{\mu\nu} = \partial_\lambda F_{\mu\nu} - i[A_\lambda, F_{\mu\nu}].$$

Можно показать, что скалярное произведение, инвариантное относительно представления  $U_F(P)$ , имеет вид

$$(F_{\mu\nu}, F'_{\sigma\rho}) = \int d^4x \operatorname{Tr} (F_{\mu\nu}^\dagger(x) F'_{\sigma\rho}(x)),$$

так что действие для калибровочного поля выражается через его скалярный квадрат:  $S[F] = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^\dagger, F^{\mu\nu})$ . Это лишний раз подтверждает естественность рассматриваемого теоретико-группового формализма.

## Глава 7

### КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВАХ С НЕЕВКЛИДОВОЙ ТОПОЛОГИЕЙ

В предыдущей главе мы познакомились с тем, как можно описать пространственно-временные свойства частиц, движущихся в калибровочном поле, на языке группы путей и ее пред-

ставлений. Этим задача описания таких частиц отнюдь не решена. Мы еще ничего не говорили о том, какому уравнению движения должны подчиняться волновые функции таких частиц. Пока эти функции совершенно произвольны. Еще ничего не говорилось о том, как описывать спиновые переменные таких частиц. Обсуждение этих вопросов мы отложим до гл. 9. Пока же продолжим обсуждение тех свойств, которые описываются пространством  $\mathcal{H}$  (кинематических свойств).

Напомним, что состояния из этого пространства мы называли локализованными, потому что среди них есть такие, которые локализованы в любой, даже очень малой области пространства-времени. Следовательно, пространство  $\mathcal{H}$  позволяет изучать локальные свойства частиц, отвлекаясь от их глобальных свойств, таких, как масса или спин. Оказывается, что даже изучение одних локальных свойств в калибровочном поле представляет интерес и нетривиальную задачу. Это связано, конечно, с тем, что с некоторой точки зрения даже само калибровочное поле можно интерпретировать как характеристику локальных свойств (внутренних степеней свободы) частицы.

Если до сих пор мы рассматривали частицы только в пространстве Минковского, то в этой главе перейдем к рассмотрению более сложных ситуаций, когда пространство-время обладает иной топологией: 1) Сначала будет рассмотрен эффект Ааронова—Бома, т. е. поведение частицы в поле длинного тонкого соленоида. Можно сформулировать эту задачу как описание частицы в пространстве-времени, которое получается из пространства Минковского выбрасыванием плоскости (мировой поверхности нити соленоида). 2) Затем будут рассмотрены свойства частиц в пространстве-времени, которое получается из пространства Минковского отождествлением точек, отстоящих на некоторый фиксированный вектор (свертыванием пространства Минковского в цилиндр). 3) Наконец, будут рассмотрены частицы в поле магнитного заряда, когда можно считать, что из пространства Минковского выброшена прямая (мировая линия заряда). Во всех этих случаях нетривиальность топологии приводит к появлению полей (или представлений группы петель) «топологического типа», которые могут быть нетривиальными даже при нулевой напряженности.

Рассмотрение этих примеров позволяет накопить опыт, который приводит к интересному обобщению. В последних параграфах мы рассмотрим теорию дифференциальных форм, основанную на теоремах Стокса и де Рама, а затем обобщим эту теорию на случай неабелевых форм (форм связности). Оказывается, все главные свойства дифференциальных форм имеют аналоги в теории неабелевых форм, причем формулировка их становится особенно простой и наглядной, если вместо самих форм рассматривать соответствующие представления группоидов путей.



## § 1. Эффект Ааронова — Бома

В предыдущей главе было показано, что частицы в пространстве Минковского  $\mathcal{M}$  описываются индуцированными представлением группы путей  $U(P) = \alpha(L) \uparrow P$ , где  $\alpha(L)$  — какое-то представление подгруппы петель. Был подробно рассмотрен один, правда, очень широкий класс представлений  $\alpha(L)$  — представление упорядоченными экспонентами. Было показано, что эти представления описывают калибровочные поля, а соответствующие индуцированные представления — частицы в калибровочных полях. Однако группа петель  $L$  обладает представлениями, которые могут быть описаны чисто геометрически, без обращения к упорядоченным экспонентам.

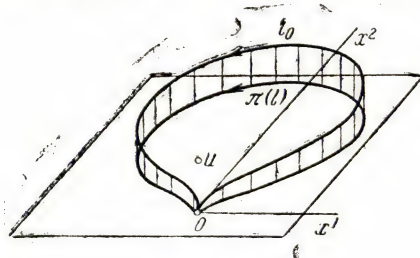


Рис. 18.

Представления такого рода по существу сводятся к представлениям так называемой фундаментальной группы, характеризующей топологию пространства Минковского, в которое введены те или иные препятствия.

Сейчас мы рассмотрим одно из таких вырожденных представлений. Оно связано с топологией пространства  $\mathcal{M}'$ , которое получается из пространства Минковского выбрасыванием одной плоскости. Представление группы петель в данном случае сводится к представлению фундаментальной группы пространства  $\mathcal{M}'$ . Каждый элемент этой группы состоит из петель (с фиксированным началом), которые могут быть превращены друг в друга непрерывной деформацией. Такой класс характеризуется числом обходов вокруг выброшенной плоскости. Это представление описывает магнитное поле бесконечного прямого тонкого соленоида. Индуцированное представление описывает частицы в поле соленоида и в частности так называемый эффект Ааронова — Бома — интерференционные явления, наблюдаемые у таких частиц.

Рассмотрим проекцию  $\pi$  пространства Минковского на плоскость  $(x^1, x^2)$ . Это значит, что

$$\pi(x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2).$$

Каждой петле  $l \in L$  сопоставим, как обычно, петлю  $l_0$ , начинающуюся в точке  $O$ , и спроектируем ее на плоскость. Обозначим  $\pi(l) = \pi(l_0)$ , так что  $\pi(l)$  — это петля в плоскости  $(x^1, x^2)$ , начинающаяся в начале отсчета этой плоскости (рис. 18). Пусть  $u = (u^1, u^2)$  — некоторая фиксированная точка в плоскости  $(x^1, x^2)$ , не совпадающая\*) с  $O$ . Будем характеризовать каждую петлю

\*) Впрочем, можно считать, что эта точка расположена близко к  $O$ .

$l \in L$  тем, сколько раз петля  $\pi(l)$  обходит вокруг точки  $u$ . Обозначим это целое число через  $n(l)$ . Как обычно в таких случаях, считаем  $n(l)$  положительным или отрицательным в зависимости от того, совершается ли обход против часовой стрелки или по часовой стрелке (если смотреть со стороны положительной полуоси  $x^3$ ).

Таким образом, каждой петле  $l \in L$  сопоставляется целое число  $n(l)$ . Теперь положим

$$\alpha(l) = e^{i\Omega n(l)}, \quad (1.1)$$

где  $\Omega$  — некоторое действительное число. Совершенно ясно, что  $l \mapsto \alpha(l)$  — представление группы петель  $L$ . Индуцируя его на группу путей, мы получим представление  $U(P) = \alpha(L) \uparrow P$ . Вполне естественно задать вопрос: не описывает ли это представление некоторый тип частиц и не описывает ли представление  $\alpha(L)$  некоторого силового поля. Оказывается, ответы утвердительны. Представление  $\alpha(L)$  описывает поле бесконечно тонкого бесконечно длинного идеального соленоида с током, расположенного параллельно оси  $x^3$  и проходящего через точку  $u$ , а представление  $U(P)$  описывает частицы в поле этого соленоида.

Как известно, идеальный соленоид с током создает магнитное поле, которое внутри него однородно и направлено вдоль его оси, а снаружи равно нулю. Следовательно, бесконечно тонкий соленоид создает бесконечно узкую трубку магнитных силовых линий, вне которой напряженность поля везде равна нулю. Будем считать, что магнитный поток, текущий вдоль этой трубки, конечен (это означает, что напряженность поля внутри соленоида бесконечно велика, но произведение напряженности на площадь поперечного сечения соленоида конечна). Магнитное поле такой конфигурации приводит в точности к такому представлению  $\alpha(L)$ , которое было только что описано.

Для доказательства воспользуемся *теоремой Стокса*, сформулированной и доказанной в § 10 гл. 6. Согласно этой теореме

интеграл  $\int A_\mu dx^\mu$  вдоль любого замкнутого контура равен ин-

тегралу  $\frac{1}{2} \int F_{\mu\nu} d\bar{x}^{\mu\nu}$  по поверхности, натянутой на этот контур. Если контур целиком лежит в гиперплоскости  $x^0 = \text{const}$  (в один момент времени), то последний интеграл равен магнитному потоку сквозь данный контур. В случае той конфигурации поля, которая нас интересует, этот интеграл будет равен нулю, если соленоид проходит вне контура, и равен потоку, текущему вдоль соленоида, если соленоид оказывается внутри контура. В силу симметрии задачи величина интеграла не изменится, если контур деформировать в пространстве-времени, но так, чтобы его проекция на плоскость  $x^1, x^2$  не менялась. Наконец, если контур охватывает соленоид два, три и т. д. раз, то величина интеграла удваивается, утраивается и т. д. Прохождение контура в обратном направлении дает тот же результат с обратным знаком. Все это



вместе взятое как раз соответствует описанию представления  $\alpha(L)$ . Параметр  $\Omega$  связан с магнитным потоком  $\Phi$  вдоль соленоида формулой \*)  $\Omega = e\Phi$ .

Рассмотрим теперь заряженную частицу, движущуюся в поле соленоида. Локальные свойства такой частицы описываются представлением  $U(P)$  группы путей. Как обычно, можно реализовать пространство  $\mathcal{H}$ , в котором действует это представление, функциями от путей  $\Psi(p)$ , удовлетворяющими структурному условию  $\Psi(pl) = \alpha(l^{-1}) \Psi(p)$ . На такие функции представление  $U$  действует как левый сдвиг:  $(U(p)\Psi)(p') = \Psi(p^{-1}p')$ . Чтобы перейти к локальной волновой функции  $\psi(x)$ , достаточно иметь функцию на группе путей  $\alpha(p)$ , которая на подгруппе  $L$  совпадает с уже определенной функцией  $\alpha(l)$  и, кроме того, для любых  $p \in P$ ,  $l \in L$  удовлетворяет условию  $\alpha(pl) = \alpha(p)\alpha(l)$ . Чтобы построить такую функцию, можно ввести потенциал  $A_\mu(x)$ , который бы порождал представление  $\alpha(L)$ .

Это нетрудно сделать. Потенциал, обладающий необходимыми свойствами, может, например, иметь вид

$$A_1 = -\frac{\Phi}{2\pi} \frac{x^2 - u^2}{(x^1 - u^1)^2 + (x^2 - u^2)^2},$$

$$A_2 = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{x^1 - u^1}{(x^1 - u^1)^2 + (x^2 - u^2)^2}$$

(остальные две компоненты равны нулю). Нетрудно убедиться непосредственно, что напряженность поля  $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$  равна нулю везде, кроме  $x^1 = u^1$ ,  $x^2 = u^2$ , где потенциал и напряженность не определены. Строя с помощью потенциала представление группоида путей

$$\alpha(p)_{x'}^{x''} = \exp \left\{ ie \int_{p_{x'}^{x''}} A_\mu(x) dx^\mu \right\},$$

можно получить функцию с нужными свойствами как  $\alpha(p) = \alpha(p_0)$ . В частности, представление группы петель определяется этими же экспонентами:  $\alpha(l) = \alpha(l_0)$ . Теперь локальную волновую функцию можно определить обычным образом:

$$\psi(x) = \alpha(x_P) \Psi(x_P),$$

где  $x_P$  — любой путь, ведущий из точки  $O$  в точку  $x$ . Представление  $U(P)$  действует в пространстве таких функций, как обычно через ковариантную производную:

$$(U(p)\psi)(x) = \alpha(p)_{p^{-1}x}^x \psi(p^{-1}x). \quad (1.2)$$

Однако можно ввести локальную функцию и без того, чтобы явно определять вектор-потенциал. Например, если для каждой

\*) Напомним, что в части II книги мы систематически используем единицы измерения, в которых  $\hbar = c = 1$ . В обычных единицах  $\Omega = (e/\hbar c)$ . Фазовый фактор в электродинамике в обычных единицах имеет вид  $\exp \left\{ i(e/\hbar c) \int A_\mu dx^\mu \right\}$ .

точки  $x \in \mathcal{M}$  однозначно выбрать и зафиксировать путь  $x_P$ , ведущий из начала отсчета  $O$  в точку  $x$ , то можно просто положить  $\phi(x) = \Psi(x_P)$ . Можно, например, в качестве путей-представителей выбрать прямолинейные пути  $x_P = \{\tau x \in \mathcal{M} \mid 0 \leq \tau \leq 1\}$ .

Преобразование волновой функции под действием представления записывается теперь иначе. Чтобы найти закон преобразования, нужно лишь аргумент функции  $\Psi(x_P)$  подвергнуть левому сдвигу и записать результат в виде произведения представителя нового класса на петлю:

$$p^{-1}x_P = (p^{-1}x)_P \cdot (p^{-1}x)_P^{-1} p^{-1}x_P.$$

Теперь, применяя к функции  $\Psi$  от этого аргумента структурное условие, получим

$$(U(p)\psi)(x) = \alpha(x_P^{-1}p(p^{-1}x)_P)\psi(p^{-1}x). \quad (1.3)$$

Теперь видно, что кроме сдвига аргумента функции  $\phi(x)$  она может умножаться еще лишь на фазовый множитель  $e^{in\Omega}$ , причем целое число  $n$  показывает, сколько раз «треугольник»  $x_P^{-1}p(p^{-1}x)_P$ , начинающийся в точке  $O$ , обходит вокруг точки  $u$  (рис. 19). Если эта точка остается вне «треугольника», то фазовый множитель равен единице. Именно фаза  $n\Omega$  воспроизводится в формуле (1.2) в форме интеграла вдоль пути. Это, между прочим, позволяет выразить «число оборотов»  $n(l)$  в виде интеграла, что иногда требуется.

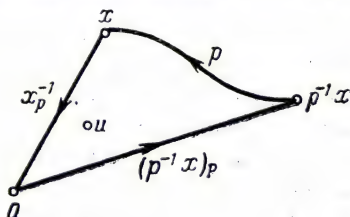


Рис. 19.

Закон преобразования (1.3) позволяет объяснить эффект Ааронова—Бома. Предположим, что в точке  $x'$  испускается некоторое количество электронов в одном и том же состоянии  $\psi$ . Затем электроны разделяются на две группы. Электроны из первой группы с помощью электронных линз направляются вдоль одного пути,  $p_1$ , электроны из второй группы — вдоль другого,  $p_2$ . В конце концов обе группы электронов попадают в одну и ту же точку  $x$ , в которой происходит их интерференция. Это позволяет измерить фазу того состояния, в котором оказались в точке  $x$  электроны первой группы, по отношению к фазе того состояния, в котором оказались электроны второй группы. Первое состояние есть  $\psi(U(p_1)\psi)(x)$ , второе —  $\psi(U(p_2)\psi)(x)$ . Используя

\* Разумеется, кое-что в этом описании следует понимать условно. Например, начальное состояние электронов формируется не в точке, а в некоторой области, достаточно большой, чтобы можно было говорить о состоянии с измеримой фазой. Однако это не существенно для понимания сути дела.

\*\* На самом деле следует учесть еще изменение состояния за счет динамики (уравнения движения). Не если условия при движении электронов по обоим путям идентичны во всем, кроме того, что связано с действием поля



формулу (1.3), получим, что фазовый множитель, описывающий разность фаз двух состояний, равен

$$\alpha(x_P^{-1} p_1 x_P') [\alpha(x_P^{-1} p_2 x_P')]^{-1} = \alpha(x_P^{-1} p_1 p_2^{-1} x_P).$$

Таким образом, измеряемая разность фаз равна  $\alpha(l)$ , где  $l = x_P^{-1} p_1 p_2^{-1} x_P$  — петля в форме лассо (рис. 20). Нетрудно видеть, что если пути  $p_1$  и  $p_2$  обходят соленоид с одной стороны, то точка  $u$  содержится вне петли  $l$  и  $\alpha(l) = 1$ . В этом случае приборы не обнаружат никакой разности фаз. Если же эти пути обходят соленоид с разных сторон, то точка  $u$  окажется внутри петли  $l$ , так

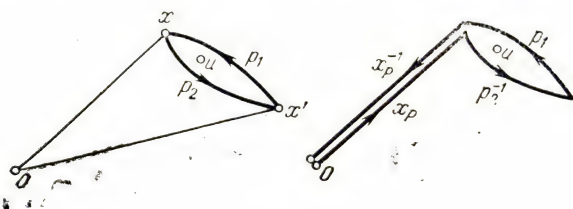


Рис. 20.

что  $\alpha(l) = e^{i\Omega}$ . В этом случае разность фаз равна  $\Omega = e\Phi$ , т. е. пропорциональна магнитному потоку, текущему вдоль соленоида. Интересно, что при  $\Phi = 2\pi n/e$ , где  $n$  — целое число, фазовый множитель обращается в единицу,  $\alpha(l) = 1$ , так что никакого интерференционного эффекта в этом случае не будет. И вообще поля, создаваемые двумя различными потоками  $\Phi$  и  $\Phi'$ , не могут быть различены при помощи интерференционного эффекта в случае, если  $\Phi' - \Phi = \frac{2\pi n}{e}$ . (На самом деле такие поля не могут быть

различены никакими экспериментами, проводимыми вне соленоида.) Описанный интерференционный эффект носит название эффекта Ааронова—Бома [107, 108, 153].

**З а м е ч а н и е.** Описание поля Ааронова—Бома как представления группы петель легко обобщить. Рассмотрим систему бесконечных или замкнутых нитей в 3-мерном пространстве  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ , которым сопоставлены числа  $\Phi_1, \Phi_2, \dots$ . Предположим, что нить  $\gamma_j$  описывает положение бесконечно тонкого соленоида, сквозь который идет магнитный поток  $\Phi_j$ . Теперь каждой петле  $l \in L$  сопоставим число  $\alpha(l) = \exp \left\{ i e \sum_j n_j \Phi_j \right\}$ , где  $n_j$  показывает, сколько раз петля  $l_0$  обходит вокруг нити  $\gamma_j$ . Тогда представление  $\alpha(L)$  описывает поле данной системы соленоидов. Очевидно, построить потенциал  $A_\mu(x)$ , описывающий это поле, чрезвычайно сложно. В этом случае проще использовать представление  $\alpha(L)$ , заданное геометрически.

соленоида, то эффекты, возникающие за счет динамики, исчезают при измерении разности фаз.

Мы познакомились с одним явлением или скорее с одним классом электромагнитных полей, для которых описание с помощью (сингулярного) потенциала  $A_\mu(x)$  хотя и возможно, но является гораздо менее наглядным, чем описание с помощью представления группы петель  $\alpha(L)$ . По существу это связано с тем, что поле в данном случае полностью сосредоточено в многообразии меры нуль (в данном случае плоскость  $x^1=u^1$ ,  $x^2=u^2$ ). Из-за этого удалось описать поле, выбросив это многообразие из рассмотрения и характеризуя петли, лежащие в оставшейся части пространства-времени, их топологическими свойствами по отношению к выброшенному многообразию (сколько раз петля обходит вокруг него). Выбрасывание плоскости, заметаемой в пространстве Минковского нитью соленоида, делает это пространство-время неодносвязным. В *неодносвязном* пространстве петли распадаются на классы (как говорят, *гомотопические классы*) таким образом, что петли из разных классов не могут быть переведены друг в друга непрерывной деформацией. Представление  $\alpha(L)$ , описывающее поле Ааронова—Бома, относится к тому типу, когда  $\alpha(L)$  определяется не конкретным видом петли  $l_0$ , а только тем, к какому гомотопическому классу эта петля относится (в данном случае — сколько раз обходит вокруг выброшенной точки). Классы петель образуют так называемую фундаментальную группу. В рассматриваемом случае *представление группы петель сводится к представлению фундаментальной группы*.

В следующем параграфе мы познакомимся с другим случаем неодносвязного пространства и представлениями петель в этом пространстве. На этот раз неодносвязное пространство будет построено из пространства Минковского не выбрасыванием подмногообразия, а отождествлением некоторых точек.

## § 2. Поля в пространстве Минковского с цилиндрической топологией

Мы уже говорили о том, что группа путей универсальна и пригодна для описания даже искривленного пространства. Сейчас мы рассмотрим простейший случай, когда пространство-время в любой достаточно малой области ничем не отличается от пространства Минковского, но в целом отличается от него своей топологией. Это пространство  $\mathcal{M}_c$  можно получить из пространства Минковского  $\mathcal{M}$ , если произвести в нем некоторые отождествления. Именно, будем считать, что две точки  $\xi, \xi' \in \mathcal{M}$  эквивалентны  $\xi \sim \xi'$ , если  $\xi' = \xi + nc$ , где  $c$  — фиксированный вектор, а  $n \in \mathbb{Z}$ , т. е. целое число. Таким образом, в пространстве Минковского вводится периодичность с периодом  $c$ , оно как бы свертывается в цилиндр. Фактор-пространство  $\mathcal{M}/\sim = \mathcal{M}_c$  мы и будем считать пространством-временем.

Само пространство  $\mathcal{M}$  в этом случае будет играть вспомогательную роль. Можно считать, что это касательное пространство



к  $\mathcal{M}_c$  в любой его точке. Точки вспомогательного пространства  $\mathcal{M}$  будем обозначать буквами  $\xi, \xi', \dots$ , а точки физического пространства  $\mathcal{M}_c$  — буквами  $x, x', \dots$ . Следовательно,  $x = \xi + c\mathbb{Z}$  — целый класс точек из  $\mathcal{M}$ . Этот класс легко восстанавливается по любому своему представителю  $\xi$ .

Действие группы путей  $P$  на  $\mathcal{M}_c$  естественно определяется, так как известно действие этой группы на  $\mathcal{M}$ . Именном,

$$px = p(\xi + c\mathbb{Z}) = p\xi + c\mathbb{Z} = x + p_{\mathcal{M}},$$

где  $[\xi]_{\mathcal{M}} = \xi(1) - \xi(0)$  — вектор сдвига. Ясно, что стабилизатор точки пространства  $\mathcal{M}_c$  уже не совпадает с группой петель  $L$ . Кроме петель в стабилизатор входят пути, имеющие вектор сдвига, кратный  $c$ . Другими словами, стабилизатором точки  $O$  (а также любой другой) является группа

$$L_c = \{p \in P \mid p_{\mathcal{M}} \in c\mathbb{Z}\}.$$

Выберем и зафиксируем некоторый путь  $\sigma \in P$ , имеющий вектор сдвига  $\sigma_{\mathcal{M}} = c$ . Тогда любой элемент стабилизатора представляется в виде  $l_c = \sigma^n l$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $l \in L$ .

Теперь, по общей схеме (§ 4, 5 гл. 6) для построения теории частиц в пространстве  $\mathcal{M}_c$  следует найти представление группы  $L_c$  и индуцировать его на группу  $P$ . Полученное таким образом представление позволит дать пространственно-временную интерпретацию состояний частиц. Следовательно, очередная задача состоит в том, чтобы описать представления группы  $L_c$ . Для этого нам будет полезно то обстоятельство, что подгруппа  $L \subset L_c$  инвариантна:  $\sigma L \sigma^{-1} = L$ .

Предположим, что  $\alpha_c(l_c) = \alpha_c(\sigma^n l) =$  — представление группы  $L_c$  в некотором пространстве  $\mathcal{L}$ . Обозначим  $\alpha_c(\sigma) = C$ . Тогда ограничение представления  $\alpha_c$  на подгруппу элементов вида  $\sigma^n$  имеет очень простой вид:  $\alpha_c(\sigma^n) = C^n$ . Ограничение на другую подгруппу  $L \subset L_c$  дает представление группы петель  $l \mapsto \alpha_c(l)$ . Мы изучили в предыдущей главе некоторые представления этой группы и знаем, что представление упорядоченными экспонентами

$$\alpha(l) = P \exp \left\{ i \int_{l_0} A_{\mu}(\xi) d\xi^{\mu} \right\} \quad (2.1)$$

описывает калибровочное поле в пространстве Минковского (если  $A_{\mu}(\xi)$  — просто числа, то электромагнитное поле). Естественно предполагать, что калибровочное поле на пространстве-времени  $\mathcal{M}_c$  описывается таким представлением  $\alpha_c(L_c)$ , в котором  $\alpha_c(l) = \alpha(l)$  — упорядоченные экспоненты вида (2.1).

Зная  $\alpha_c(\sigma) = C$  и представление группы петель  $\alpha_c(l) = \alpha(l)$ , можно однозначно восстановить представление  $\alpha_c(L_c)$ :

$$\alpha_c(l_c) = \alpha_c(\sigma^n l) = C^n \alpha(l). \quad (2.2)$$

Следовательно, чтобы задать калибровочное поле на пространстве-времени  $\mathcal{M}_c$ , достаточно задать оператор  $C$  и калибровочное поле на пространстве Минковского  $\alpha(L)$ . Однако последнее не может быть произвольным. Действительно, поскольку для любой петли  $l \in L$  элемент  $\sigma l \sigma^{-1}$  опять является петлей, имеем соотношение

$$\alpha(\sigma^{-1} l \sigma) = C^{-1} \alpha(l) C. \quad (2.3)$$

Это и есть дополнительное условие на калибровочное поле  $\alpha(L)$ . Если это условие выполняется, то формула (2.2) определяет представление группы  $L_c$ . Условие (2.3) означает, что потенциал  $A_\mu^{(c)}(\xi) = A_\mu(\xi + c)$  получается из потенциала  $A_\mu(\xi)$  калибровочным преобразованием. Если фазовую функцию, определяющую это калибровочное преобразование, обозначить через  $V(\xi)$ , то из (2.3) следует, что  $V(O) = \alpha(\sigma) C^{-1}$  и

$$A_\mu(\xi + c) = V(\xi) A_\mu(\xi) V^{-1}(\xi) - i V_{,\mu}(\xi) V^{-1}(\xi). \quad (2.4)$$

Физически условие (2.3) или (2.4) означает, что при сдвиге на период  $c$  в пространстве Минковского калибровочное поле  $\alpha(L)$  не меняется. Этого и следовало ожидать, поскольку оно служит лишь для описания калибровочного поля на  $\mathcal{M}_c$ . Потенциал  $A_\mu(\xi)$  при этом не обязательно является периодической функцией. В общем случае он удовлетворяет лишь более слабому условию (2.4): он периодичен с точностью до калибровки.

Теперь рассмотрим частицы, движущиеся в калибровочном поле в пространстве-времени  $\mathcal{M}_c$ . Локальные свойства этих частиц описываются, очевидно, индуцированным представлением  $U(P) = \alpha_c(L_c) \uparrow P$ . Стандартная реализация пространства  $\mathcal{H}$ , в котором действует представление  $U$  — это функции  $\Psi: P \rightarrow \mathcal{L}$ , удовлетворяющие структурному условию

$$\Psi(pl\sigma^n) = \alpha_c(\sigma^n l^{-1}) \Psi(p) = C^{-n} \alpha(l^{-1}) \Psi(p).$$

Представление  $U$  действует на такие функции левым сдвигом:

$$(U(p)\Psi)(p') = \Psi(p^{-1}p').$$

Перейдем теперь к локальной волновой функции. Используем для этого функцию

$$\alpha(p) = \alpha(p)_0 = P \exp \left\{ i \int_{p_0} A_\mu(\xi) d\xi^\mu \right\}$$

и положим  $\phi(p) = \alpha(p) \Psi(p)$ . Нетрудно видеть, что введенная так функция удовлетворяет условию  $\phi(pl) = \phi(p)$  для любой петли  $l \in L$ . Значит, функция  $\phi$  постоянна на смежных классах  $pL$  и может рассматриваться как функция от этих классов или, что то же, от точек пространства Минковского. Обозначим  $\phi(\xi) = \alpha(\xi_p) \Psi(\xi_p)$ , где  $\xi_p$  — любой путь, ведущий из  $O$  в точку  $\xi \in \mathcal{M}$ . Таким образом, состояния частицы в  $\mathcal{M}_c$  можно описывать



волновой функцией, заданной на пространстве  $\mathcal{M}$ . В силу структурного условия имеем для нее

$$\psi(\xi + c) = V(\xi) \psi(\xi), \quad (2.5)$$

где

$$V(\xi) = \alpha(\xi_{p0}) C^{-1} [\alpha(\xi_p)]^{-1}$$

— фазовая функция, фигурирующая в формуле (2.4). Под действием представления  $U(P)$  функция  $\psi(\xi)$  преобразуется следующим образом:

$$(U(P)\psi)(\xi) = \alpha(p)_{\xi-p_{0M}}^{\xi} \psi(\xi - p_{0M}).$$

Это значит, что генератором представления является ковариантная производная.

Рассмотрим, в частности, представление, характеризующее нулевым потенциалом  $A_\mu \equiv 0$ . В этом случае имеем

$$\psi(\xi + c) = C^{-1} \psi(\xi), \quad (U(p)\psi)(\xi) = \psi(\xi - p_{0M}). \quad (2.6)$$

Таким образом, в этом случае преобразование функции заключается только в сдвиге ее аргумента, а сама функция удовлетворяет условию *квазипериодичности* (2.6). Не так давно в работах [109—112] были рассмотрены частицы, обладающие тем свойством, что их волновая функция задается не на самом пространстве-времени  $\mathcal{M}_0$ , а на накрывающем пространстве  $\mathcal{M}$  и обладает на нем свойством квазипериодичности (в этих работах рассматривался случай, когда  $C$  — число). Такие частицы были названы *закрученными*. Из сказанного выше следует, что *закрученные частицы можно интерпретировать как обычные частицы в калибровочном поле особого рода* \*). Такое поле характеризуется нулевым потенциалом  $A_\mu \equiv 0$ , но отличным от единицы оператором  $C$ . Оно имеет много общего с электромагнитным полем, описывающим эффект Ааронова—Бома (см. предыдущий параграф). По-видимому, интерпретация ситуации (2.6) как специфического калибровочного поля и обычных калибровочно заряженных частиц имеет преимущества, и мы еще к ней вернемся. Тем не менее сейчас для одного вычисления будет использована как раз интерпретация в терминах «закрученных» частиц.

Рассмотрим «закрученные» частицы, состояния которых описываются квазипериодическими волновыми функциями с  $C^{-1} = e^{i\Omega}$ , где  $\Omega$  — числовой параметр. Найдем *тензор энергии-импульса* таких частиц, усредненный по состоянию вакуума. Вычисления будут вестись по аналогии с тем, как это делалось для  $\Omega=0$ ,  $\pi$  в работе [111].

Тензор энергии-импульса заряженного скалярного безмассового поля равен

$$T_{\mu\nu}(\xi) = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial \psi}{\partial \xi^\nu} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \xi^\nu} \frac{\partial \psi}{\partial \xi^\mu} - \eta_{\mu\nu} \eta^{\lambda\lambda} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \xi^\lambda}.$$

\*) При этом, правда, мы используем термин «закрученная частица» несколько иначе, чем в работе [109], см. Замечание ниже.

Это можно записать в виде

$$T_{\mu\nu}(\xi) = \lim_{\xi' \rightarrow \xi} L_{\mu\nu} \bar{\psi}(\xi) \psi(\xi'), \quad (2.7)$$

где введен дифференциальный оператор

$$L_{\mu\nu} = (\delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} + \delta_{\nu}^{\alpha} \delta_{\mu}^{\beta} - \eta_{\mu\nu} \gamma^{\alpha\beta}) \frac{\partial}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \xi^{\beta}}.$$

Если интервал между точками  $\xi$  и  $\xi'$  всегда пространственноподобный, то произведение операторов поля в формуле (2.7) можно заменить  $T$ -произведением, т. е. произведением, упорядоченным по времени. После этого, усредняя формулу (2.7) по вакууму поля  $\psi$  и пользуясь определением *причинной функции Грина (пропагатора)*

$$D_{\text{caus}}(\xi - \xi') = i \langle 0 | T \bar{\psi}(\xi) \psi(\xi') | 0 \rangle,$$

получим для вакуумного среднего тензора энергии-импульса

$$\langle 0 | T_{\mu\nu}(\xi) | 0 \rangle = -i \lim_{\xi' \rightarrow \xi} L_{\mu\nu} D_{\text{caus}}(\xi - \xi').$$

Остается подставить выражение для причинной функции Грина, которое для безмассовой скалярной частицы имеет очень простой вид:

$$D_{\text{caus}}(a) = -\frac{i}{8\pi^2} \frac{1}{(a, a) - i0}.$$

После этого получаем

$$\langle T_{\mu\nu}(\xi) \rangle_0 = -\frac{1}{8\pi^2} L_{\mu\nu} \frac{1}{(\xi - \xi', \xi - \xi')}.$$

(правило обхода сингулярности для нас будет несущественно).

Полученное выражение справедливо для поля в пространстве Минковского  $\mathcal{M}$ . Чтобы получить выражение в пространстве  $\mathcal{M}_c$ , достаточно заметить, что распространение частицы из точки  $x' \in \mathcal{M}_c$  в точку  $x \in \mathcal{M}_c$  можно рассматривать как распространение в точку  $\xi \in \mathcal{M}$  из всех точек  $\xi' + nc$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Распространение из каждой такой точки описывается пропагатором  $D_{\text{caus}}(\xi - \xi' - nc)$ . Все полученные таким образом амплитуды распространения следует сложить, причем с соответствующими весовыми множителями  $e^{in\Omega}$ , возникающими из-за условия квазиинвариантности на операторы поля  $\psi(\xi)$ . В результате получаем для причинного пропагатора в пространстве  $\mathcal{M}_c$  выражение

$$D_{\text{caus}}^c(\xi - \xi') = -\frac{i}{8\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\Omega}}{(\xi - \xi' - nc, \xi - \xi' - nc)}.$$

Дифференцирование этой функции с помощью оператора  $L_{\mu\nu}$  дает вакуумное среднее тензора энергии-импульса в пространстве  $\mathcal{M}_c$ :

$$\langle T_{\mu\nu}^c(\xi) \rangle_0 = -i L_{\mu\nu} D_{\text{caus}}^c(\xi - \xi').$$

Теперь следует вспомнить, что оба полученных выражения  $\langle T_{\mu\nu}(\xi) \rangle_0$  и  $\langle T_{\mu\nu}^c(\xi) \rangle_0$  содержат бесконечности, свойственные квантовой теории поля. Осмысленные выражения можно получить лишь после какой-либо *регуляризации*, процедуры отбрасывания бесконечности. В данном случае это очень просто сделать. Дело в том, что бесконечности возникают из-за поведения полей на очень близких расстояниях, а на таких расстояниях пространство  $\mathcal{M}_c$  не отличается от  $\mathcal{M}$ . Поэтому можно думать, что бесконечности тензора энергии-импульса в пространствах  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{M}_c$  совпадают. Значит, можно регу-



ляризовать выражение для тензора энергии-импульса в  $\mathcal{M}_c$ , просто вычтя из него выражение для тензора энергии-импульса в  $\mathcal{M}$ . Это дает

$$\langle T_{\mu\nu}^{c, \text{reg}}(\xi) \rangle_0 = -\frac{1}{8\pi^2} L_{\mu\nu} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{i n \Omega}}{(\xi - \xi' - n c, \xi - \xi' - n c)}.$$

Это выражение справедливо лишь для пространственноподобного вектора  $c$ , так как использовалась процедура, применимая лишь при пространственноподобном разнесении точек.

Далее простые вычисления приводят к выражению

$$\langle T_{\mu\nu}^{c, \text{reg}}(\xi) \rangle_0 = \frac{1}{\pi^2 (c, c)^2} \left[ 4 \frac{c_\mu c_\nu}{(c, c)} - \eta_{\mu\nu} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \Omega}{n^4}.$$

Фигурирующий здесь ряд может быть просуммирован, что дает окончательно (при  $0 \leq \alpha < 2\pi$ )

$$\langle T_{\mu\nu}^{c, \text{reg}}(\xi) \rangle_0 = \frac{1}{\pi^2 (c, c)^2} \left[ 4 \frac{c_\mu c_\nu}{(c, c)} - \eta_{\mu\nu} \right] \left( \frac{\pi^4}{90} - \frac{\pi^2 \Omega^2}{12} + \frac{\pi \Omega^3}{12} - \frac{\Omega^4}{48} \right). \quad (2.8)$$

При  $\Omega=0$ ,  $\pi$  это совпадает с выражением, полученным в [111] (точнее, в два раза больше полученного там выражения, так как мы рассматривали заряженное поле вместо нейтрального).

Вернемся к общему случаю, когда калибровочное поле в пространстве  $\mathcal{M}_c$  описывается вектор-потенциалом  $A_\mu(\xi)$ , а частица описывается волновой функцией  $\psi(\xi)$ . Потенциал в общем случае является «периодическим с точностью до калибровки» (2.4), а волновая функция «квазипериодической» (2.5). Однако сейчас мы покажем, что изменением калибровки всегда можно добиться того, чтобы и потенциал, и волновая функция были периодическими. Действительно, перейдем к новому потенциалу  $A'_\mu$  с помощью фазовой функции  $V_1(\xi)$ , и постараемся подобрать эту функцию так, чтобы потенциал был периодическим:

$$A'_\mu(\xi + c) = A'_\mu(\xi).$$

Учитывая (2.4), нетрудно показать, что это возможно, если подобрать функцию  $V_1(\xi)$  таким образом, чтобы величина  $V_1^{-1}(\xi) V_1(\xi + c) V(\xi)$  не зависела от  $\xi$  и коммутировала со всеми  $A_\mu(\xi)$ . Такую функцию всегда можно найти, и с очень большим произволом.

С помощью нового потенциала можно построить функцию  $\alpha'(p)$ . Из условия (2.3) следует, что

$$\alpha(c) C^{-1} = e^{i\Omega}$$

— оператор, коммутирующий со всеми  $\alpha'(l)$ . Записывая условие, аналогичное (2.5), для  $\alpha'(p)$  и  $\psi'(\xi)$ , получим

$$\psi'(\xi + c) = e^{i\Omega} \psi'(\xi).$$

Мы получили теперь периодический потенциал  $A'_\mu$  и квазиперио-


дическую волновую функцию  $\psi'(\xi)$ . Однако оператор, описывающий отличие ее от периодической,  $e^{i\Omega}$ , коммутирует со всеми  $A_\mu(\xi)$ . Это значит, что он принадлежит центру того представления калибровочной группы, которое действует в пространстве  $\mathcal{L}$ .

Теперь мы еще раз совершим калибровочное преобразование с помощью фазовой функции  $V_2(\xi) = \exp \{-i\Omega(\xi, c) / (c, c)\}$ . Нетрудно убедиться, что после этого преобразования и потенциал, и волновая функция частицы становятся периодическими:

$$A_\mu(\xi + c) = A_\mu(\xi), \quad \psi'(\xi + c) = \psi'(\xi).$$

Таким образом, мы убедились, что всегда существует такая калибровка калибровочного поля в пространстве  $\mathcal{M}_c$ , при которой вектор-потенциал  $A_\mu(\xi)$  является периодическим и может, следовательно, рассматриваться как поле на  $\mathcal{M}_c$  (а не на накрывающем пространстве  $\mathcal{M}$ ). Одновременно можно добиться того, что волновые функции  $\psi(\xi)$ , описывающие калибровочно заряженные частицы, будут периодическими. Действие представления  $U$  в пространстве таких функций генерируется ковариантной производной. Следовательно, мы получаем обычную картину, характерную для пространства Минковского и отличающуюся от нее лишь периодичностью всех функций. Существенно, однако, что поле нулевой напряженности,  $F_{\mu\nu}(\xi) \equiv 0$ , описывается теперь ненулевым вектор-потенциалом  $A_\mu(\xi)$ . Если попытаться перейти к нулевому потенциалу, то неизбежно периодические функции  $\psi'(\xi)$  станут квазипериодическими.

**З а м е ч а н и е.** Тот факт, что обе функции  $A_\mu(\xi)$ ,  $\psi(\xi)$  могут быть сделаны в данном случае периодическими, связан с тем, что комплексные расслоения над  $\mathcal{M}_c$  тривиальны. По терминологии Айшема [109], это означает отсутствие закручивания. Закрученным в  $\mathcal{M}_c$  может быть только действительное, но не комплексное поле. Однако формула (2.8) показывает, что с физической точки зрения рассмотренное нами комплексное (заряженное) поле вполне аналогично закрученному нейтральному полю (см. также [112]).

 Мы рассмотрели поля и частицы в пространстве, которое локально не отличается от пространства Минковского, а в целом отличается от него тем, что имеет *неевклидову топологию*. Ясно, что использованный метод легко распространяется на локально плоские пространства с другими топологиями. Каждое такое пространство  $\mathcal{M}'$  получается из  $\mathcal{M}$  факторизацией по некоторому отношению эквивалентности, т. е. отождествлением некоторых точек. Для того чтобы применить группу путей, достаточно описать отождествления с помощью путей, т. е. найти стабилизатор  $L'$  произвольной точки пространства-времени. Этот стабилизатор обязательно включает группу петель  $L$ , но содержит и другие элементы. Исследование полей в пространстве  $\mathcal{M}'$  сводится



к исследованию представлений группы  $L'$ , а оно в свою очередь сводится к исследованию представлений фактор-группы  $L'/L$ . Весь анализ можно провести методами теории индуцированных представлений [37].

### § 3\*. Блоховские волновые функции в периодических электромагнитных полях

В предыдущем параграфе были рассмотрены поля и частицы в пространстве Минковского, свернутом в цилиндр, т. е. в пространстве с «периодической» геометрией. Теперь мы покажем, что тот же по существу математический аппарат описывает частицы в периодических полях, даже если геометрия предполагается обычной. На этом пути мы получим описание блоховских волновых функций, характеризующих квазиимпульсом, с теоретико-групповой точки зрения.

В предыдущем параграфе рассматривалось пространство  $\mathcal{M}_c$ , которое получается из пространства Минковского  $\mathcal{M}$  отождествлением точек  $\xi \sim \xi + nc$ , где  $n \in \mathbb{Z}$  — целое число, а  $c$  — фиксированный вектор в пространстве Минковского — период. Стабилизатором точки пространства  $\mathcal{M}_c$  является группа  $L_c$ , состоящая из элементов вида  $l_c = \sigma^n l$ , где  $l \in L$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  и  $\sigma$  — фиксированный путь, сдвигающий на период, т. е. такой, что вектор сдвига  $\sigma_M = c$ . Оказывается, калибровочное поле в пространстве  $\mathcal{M}_c$  описывается представлением  $\alpha_c(L_c)$  таким, что

$$\alpha_c(\sigma^n l) = C^n \alpha(l),$$

где  $\alpha(L)$  — калибровочное поле в пространстве Минковского (т. е.  $\alpha(l)$  — упорядоченная экспонента). Это поле согласовано с оператором  $C$  с помощью условия

$$\alpha(\sigma^{-1} l \sigma) = C^{-1} \alpha(l) C,$$

которое означает, в частности, что калибровочное поле на пространстве Минковского  $\alpha(L)$  является периодическим (хотя его вектор-потенциал является периодическим лишь с точностью до калибровочного преобразования). Частицы, движущиеся в поле  $\alpha_c(L_c)$ , описываются представлением  $\alpha_c(L_c) \uparrow P = U(P)$ .

Сейчас мы покажем, что при соответствующем выборе оператора  $C$  (и пространства, в котором он действует) представление  $U(P)$  описывает частицы в обычном пространстве Минковского, однако в периодическом поле. Для простоты рассмотрим лишь простейший случай абелева калибровочного, т. е. электромагнитного поля.

Пусть  $\alpha(L)$  — периодическое электромагнитное поле в пространстве Минковского  $\mathcal{M}$ , имеющее период  $c$ . Условие периодичности можно записать в виде

$$\alpha(\sigma^{-1} l \sigma) = \alpha(l), \quad (3.1)$$

где  $\sigma$  — путь, сдвигающий на период, т. е.  $\sigma_M = c$ . Тот факт, что

поле абелево (электромагнитное), означает, что  $\alpha(l)$  — числа, а не операторы. Частицы в этом поле описываются, как всегда, индуцированным представлением  $U(P) = \alpha(L) \uparrow P$ .

Для анализа этого представления нам в качестве вспомогательной понадобится группа  $L_c$ , определенная выше. Разумеется, в данном случае она уже не имеет смысла стабилизатора точки. Воспользуемся теоремой о транзитивности индуцирования или об индуцировании последовательными шагами. Эта теорема утверждает, что результат индуцирования не изменится, если индуцировать сначала на некоторую промежуточную подгруппу, а затем получившееся представление индуцировать уже на всю группу (см., например, [37]). В интересующем нас случае это дает

$$U(P) = \alpha(L) \uparrow P = (\alpha(L) \uparrow L_c) \uparrow P.$$

Если обозначить  $\alpha_c(L_c) = \alpha(L) \uparrow L_c$ , то имеем  $U(P) = \alpha_c(L_c) \uparrow P$ .

Дальнейшие шаги будут состоять в том, чтобы проанализировать представление  $\alpha_c(L_c)$  и выделить в нем неприводимое подпредставление  $\alpha_c^\theta(L_c)$ . Тогда  $U_\theta(P) = \alpha_c^\theta(L_c) \uparrow P$  — неприводимое подпредставление в  $U(P)$ . Оказывается, что оно действует в пространстве так называемых *блоховских функций*, обладающих свойством квазипериодичности. Из сказанного ясно, что любую функцию из пространства-носителя представления  $U(P)$ , т. е. любую волновую функцию частицы, можно разложить по блоховским функциям.

Каноническая реализация представления  $\alpha_c(L_c) = \alpha(L) \uparrow L_c$  действует левыми сдвигами в пространстве  $\mathcal{F}$  функций  $\Phi: L_c \rightarrow \mathbb{C}$ , удовлетворяющих структурному условию  $\Phi(l_c l) = \alpha(l^{-1}) \Phi(l_c)$ . Нетрудно выяснить, что это представление приводимо, и разложить его на неприводимые. Неприводимое подпредставление  $\alpha_c^\theta(L_c)$  действует в подпространстве  $\mathcal{F}_\theta$  функций вида

$$\Phi_\theta(\sigma^n l) = e^{-in\theta} \alpha(l^{-1}) \Psi_\theta, \quad (3.2)$$

каждая из которых полностью определяется одним числом  $\Psi_\theta$ . Действуя на такие функции левым сдвигом, легко непосредственно убедиться, что они преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_c^\theta(l) \Phi_\theta &= \alpha(l) \Phi_\theta, \\ \alpha_c^\theta(\sigma) \Phi_\theta &= e^{i\theta} \Phi_\theta. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Произвольная функция  $\Phi \in \mathcal{F}$  может быть представлена как интеграл по  $\theta$  функций  $\Phi_\theta \in \mathcal{F}_\theta$ . Это значит, что представление  $\alpha_c$  разлагается в прямой интеграл представлений  $\alpha_c^\theta$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Перейдем к представлению  $U(P) = \alpha_c(L_c) \uparrow P$ . Оно действует левыми сдвигами в пространстве функций  $\varphi: P \rightarrow \mathbb{C}$ , удовлетворяющих структурному условию  $\varphi(pl_c) = \alpha_c(l_c^{-1}) \varphi(p)$ . Используя для  $\mathcal{F}$  каноническую реализацию, мы видим, что



вектор  $\varphi$  можно понимать как (числовую) функцию двух переменных  $\varphi(p, l_e)$ , на которую наложены структурные условия

$$\varphi(p, l_e l) = \alpha(l^{-1}) \varphi(p, l_e),$$

$$\varphi(pl_e, l'_e) = \varphi(p, l_e l'_e).$$

Представление  $U(P)$  действует на такую функцию как левый сдвиг аргумента  $p$ .

Теперь рассмотрим подпредставление  $U_\theta(P) = \alpha_\theta(L_e) \uparrow P$ . Оно действует в пространстве функций  $\varphi_\theta: P \rightarrow \mathcal{F}_\theta$ , т. е. по второму аргументу функция  $\varphi_\theta(p, l_e)$  должна иметь специальный вид (3.2):

$$\varphi_\theta(p, \sigma^n l) = e^{-in\theta} \alpha(l^{-1}) \Psi_\theta(p). \quad (3.4)$$

При этом первое из условий, наложенных на функцию  $\varphi_\theta(p, l_e)$ , удовлетворяется автоматически, а второе дает условие на функцию  $\Psi_\theta(p)$ :

$$\Psi_\theta(p \sigma^n l) = e^{-in\theta} \alpha(l^{-1}) \Psi_\theta(p). \quad (3.5)$$

Мы построили теперь и представление  $U(P)$ , и его неприводимую компоненту  $U_\theta(P)$ . Однако для физической интерпретации этого представления необходимо перейти к его реализации как представления, индуцированного из подгруппы петель,  $U(P) = \alpha(L) \uparrow P$ . Каноническая реализация этого представления действует левыми сдвигами в пространстве  $\mathcal{H}$  функций  $\Psi: P \rightarrow \mathbb{C}$  со структурным условием  $\Psi(pl) = \alpha(l^{-1}) \Psi(p)$ , а реализация локальными функциями получается по формуле  $\psi(x) = \alpha(x_p) \Psi(x_p)$ , где  $x_p$  — любой путь, ведущий из точки  $O$  в точку  $x \in \mathcal{M}$ . Функция  $\Psi$  или  $\psi$  представляет собой волновую функцию частицы, причем локальная функция  $\psi(x)$  осуществляет пространственно-временную интерпретацию состояния частицы. Действие представления  $U(p)$  в пространстве локальных функций  $\psi(x)$  определяется ковариантными производными по формуле

$$U(p) = P \exp \left\{ - \int_p d\xi^\mu \nabla_\mu \right\}.$$

Остается связать друг с другом различные реализации представления  $U(P)$ . Анализируя условия, наложенные на функции  $\Psi(p)$  и на функции двух переменных  $\varphi(p, l_e)$ , и учитывая, что представление  $U(P)$  действует на те и другие левым сдвигом аргумента  $p$ , находим связь между этими функциями:  $\varphi(p, l_e) = \Psi(pl_e)$ . Тем самым представления  $\alpha_e(L_e) \uparrow P$  и  $\alpha(L) \uparrow P$  отождествляются. Первое из них мы уже разложили на неприводимые, следовательно, автоматически получаем разложение на неприводимые второго представления, имеющего физическую интерпретацию.

Чтобы выделить неприводимую компоненту, достаточно лишь взять функцию  $\varphi_\theta(p, l_e)$ , имеющую вид (3.4), и найти соответствующую ей функцию одного аргумента. Легко видеть, что это будет та самая функция  $\Psi_\theta(p)$ , которая уже фигурирует в формуле

(3.4). Окончательный вывод состоит в том, что представление  $U_\theta(P)$  действует левыми сдвигами в пространстве числовых функций  $\Psi_\theta(p)$ , удовлетворяющих условию (3.5). Переходя к соответствующим локальным функциям  $\psi_\theta(x)$ , убеждаемся, что для них вместо условия (3.5) выполняется следующее условие *квазипериодичности*:

$$\psi_\theta(x+c) = e^{-i\theta} V(x) \psi_\theta(x), \quad (3.6)$$

где введено обозначение \*)

$$V(x) = \alpha(x\sigma) [\alpha(x\rho)]^{-1}.$$

Условие (3.6) можно упростить за счет подходящего выбора калибровки потенциала. В предыдущем параграфе было показано, что всегда можно выбрать калибровку так, чтобы потенциал  $A_\mu(x)$  был периодическим. Если еще  $\alpha(\sigma) = 1$ , то  $V(x) \equiv 1$  и

$$\psi_\theta(x+c) = e^{-i\theta} \psi_\theta(x). \quad (3.6')$$

Таким образом, мы описали подпространство  $\mathcal{H}_\theta \subset \mathcal{H}$  волновых функций, в которых действует подпредставление  $U_\theta(P) \subset U(P)$ . Функции из этого подпространства удовлетворяют условию квазипериодичности (3.6) или (при специальном выборе калибровки) (3.6'). Функции, удовлетворяющие условию (3.6'), называются *блоховскими функциями*. Волновые функции с такими свойствами используются для описания движения частицы в периодических полях (например, движения электрона в кристалле).

**З а м е ч а н и е.** Обычно вместо параметра  $\theta$  блоховские функции характеризуют вектором *квазиимпульса*  $k$ , который определяется так, что  $(k, c) = \theta$ . Тогда условие (3.6') принимает вид

$$\psi_\theta(x+c) = e^{-i(k, c)} \psi_\theta(x).$$

В случае, если поле вообще равно нулю, именно такой формулой описываются свойства волновой функции, описывающей состояние частицы с определенным импульсом  $k$ . При этом вектор сдвига  $c$  произволен. Для частицы в периодическом поле эта формула справедлива лишь для сдвига на период или на вектор, кратный периоду. Поэтому вектор  $k$  называется *квазиимпульсом*.

В данной главе мы рассматриваем лишь локальные свойства частицы, отвлекаясь от их глобальных свойств. В частности, мы не рассматриваем явно динамического принципа, которому должны подчиняться частицы (уравнений движения для волновых функций). Об этом речь будет идти в гл. 9. Тем не менее сейчас необходимо сделать некоторые комментарии, связанные с динамическим принципом. Обычно блоховские функции появляются в нерелятивистских задачах, когда динамический принцип опи-

\*) Условие периодичности поля (3.1) означает, что вектор-потенциал периодичен с точностью до калибровочного преобразования.  $V(x)$  — фазовая функция этого преобразования.



сывается гамильтонианом. В этом случае блоховские функции определяются как функции, являющиеся одновременно собственными функциями гамильтониана и оператора сдвига на период. Причем существенным является именно то обстоятельство, что могут существовать функции, являющиеся одновременно собственными функциями обоих этих операторов. Мы же получили блоховские функции из соображений, в которых динамический принцип явно не фигурировал. Поэтому возникает вопрос, будут ли они согласованы с динамическим принципом. Другими словами, найдутся ли функции, которые удовлетворяют уравнению движения и в то же время обладают свойством (3.6) или (3.6').

Ответ на этот вопрос можно сформулировать следующим образом: такие функции существуют, если вектор-потенциал  $A_\mu(x)$  входит в уравнения движения только через ковариантные производные. Дело в том, что в этом случае (как будет показано в гл. 9) динамический потенциал можно сформулировать в терминах интеграла по путям, в который поле входит только через операторы  $U(p)$  (как уже говорилось, эти операторы выражаются в форме упорядоченных экспонент от ковариантных производных). Следовательно, условие (3.6) совместно с динамическим принципом в том и только в том случае, если операторы  $U(p)$  не нарушают этого условия. Но сама процедура вывода условий (3.6) гарантирует это. Действительно, условия (3.6) были выведены как характеристические условия на функции, образующие подпространство  $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ , в котором действует подпредставление  $U(P)$ . Это как раз и означает, что подпространство  $\mathcal{H}_0$  инвариантно относительно операторов  $U(p)$ .

З а м е ч а н и е. Мы все время говорили о пространстве Минковского, а под динамическим принципом подразумевался релятивистский принцип (например, релятивистские уравнения движения). Но можно построить и нерелятивистскую теорию. Для этого следует в качестве  $\mathcal{M}$  рассмотреть 3-мерное евклидово пространство и изучить представления группы путей в нем. При этом представление подгруппы петель  $\alpha(L)$  будет задаваться 3-мерным вектор-потенциалом  $A(x)$  и, следовательно, будет представлять собой описание магнитного поля. Это же замечание относится практически ко всем примерам, рассмотренным в этой главе, например к эффекту Ааронова—Бома, а также к общим выводам, сделанным в главе 6.

#### § 4\*. Обобщенные блоховские функции в двоякопериодическом поле

Рассмотрим теперь двоякопериодическое электромагнитное поле. Целью будет изучение свойств волновых функций, описывающих состояния частиц в таком поле. Более конкретно, мы будем изучать свойства таких функций относительно сдвигов на периоды.

Прежде чем обратиться к этой задаче, рассмотрим вспомогательную задачу об описании частиц в пространстве-времени, сама геометрия которого обладает такой же периодичностью.

Пусть  $\mathcal{M}_\bullet = \mathcal{M}/\sim$  получается из пространства Минковского отождествлением точек  $x \sim x + n_1 c_1 + n_2 c_2$ , где  $c_1, c_2$  — любые два вектора. В этом случае стабилизатор  $L_\bullet$  точки  $O_\bullet \in \mathcal{M}_\bullet$  состоит из элементов вида

$$l_\bullet = \sigma_2^{n_2} \sigma_1^{n_1} l,$$

где  $l \in L$ ;  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ , а  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — пути, сдвигающие на соответствующие периоды, т. е.  $(\sigma_1)_*\mathcal{M} = c_1$ ,  $(\sigma_2)_*\mathcal{M} = c_2$ .

Существенное отличие от случая одного периода состоит в том, что последовательность сдвигов на периоды может оказаться петлей. Так, сдвиги вдоль сторон элементарной ячейки дают петлю (рис. 21)

$$\lambda = \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1.$$

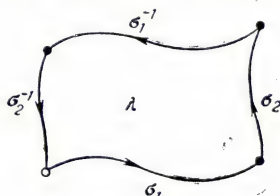


Рис. 21.

Производя сдвиги на периоды  $\sigma_1, \sigma_2$  (и обратные по отношению к ним) в различных комбинациях, можно получить множество разных петель. Любую такую петлю можно представить в виде произведения лассо вида  $p^{-1} \lambda^n p$ , где путь  $p$  также представляется в виде произведения сдвигов на периоды. Поэтому такого рода петли всегда могут быть выражены через  $\lambda$ . Петля  $\lambda$  описывает правило перестановки периодов:

$$\sigma_2 \sigma_1 = \sigma_1 \sigma_2 \lambda. \quad (4.1)$$

Именно это коммутационное соотношение позволяет доказать, что любой элемент стабилизатора может быть представлен в стандартной форме  $l_\bullet = \sigma_2^{n_2} \sigma_1^{n_1} l$ .

Для того чтобы описать калибровочное поле в пространстве  $\mathcal{M}_\bullet$ , достаточно задать представление стабилизатора,  $\alpha_\bullet(L_\bullet)$ . Ограничение его на подгруппу петель  $\alpha_\bullet(l) = \alpha(l)$  обычным образом выражается через упорядоченные экспоненты. Обозначим еще  $\alpha_\bullet(\sigma_1) = C_1$ ,  $\alpha_\bullet(\sigma_2) = C_2$ . Тогда представление произвольного элемента стабилизатора

$$\alpha_\bullet(l_\bullet) = \alpha_\bullet(\sigma_2^{n_2} \sigma_1^{n_1} l) = C_2^{n_2} C_1^{n_1} \alpha(l). \quad (4.2)$$

Следовательно, калибровочное поле в пространстве  $\mathcal{M}_\bullet$  задается операторами  $C_1, C_2$  и калибровочным полем  $\alpha(L)$  в пространстве  $\mathcal{M}$ . Однако  $\alpha(L)$  не может быть произвольным, а должно быть определенным образом согласовано с операторами  $C_1, C_2$ . Из свойств представления непосредственно следует, что должны



выполняться соотношения

$$\begin{aligned}\alpha(\sigma_1^{-1}l\sigma_1) &= C_1^{-1}\alpha(l)C_1, \\ \alpha(\sigma_2^{-1}l\sigma_2) &= C_2^{-1}\alpha(l)C_2, \\ \alpha(\lambda) &= C_2^{-1}C_1^{-1}C_2C_1.\end{aligned}\tag{4.3}$$

С помощью коммутационного соотношения (4.1) можно доказать, что эти условия являются необходимыми и достаточными, т. е. при их выполнении выражение (4.2) является представлением группы  $L_e$ .

Формулы (4.2), (4.3) задают представление группы  $L_e$ , т. е. калибровочное представление в пространстве  $\mathcal{M}_e$ . Далее описание частицы в этом поле сводится к операции индуцирования  $U(P) = \alpha_e(L_e) \uparrow P$ , которая производится стандартным образом. Следовательно, главная проблема состоит в том, чтобы описать представление  $\alpha_e(L_e)$ . Поговорим еще об этом представлении.

Первые две формулы из (4.3) означают, что калибровочное поле в пространстве Минковского, описываемое представлением  $\alpha(L)$ , является двоякопериодическим с периодами  $c_1, c_2$ . При этом потенциал  $A_\mu(\xi)$  может и не быть периодическим. В некоторых случаях он не может быть сделан периодическим никаким калибровочным преобразованием. Далее, третья из формул (4.3) показывает, что если  $\alpha(\lambda) \neq 1$ , то операторы  $C_1, C_2$  не могут быть коммутирующими. Представление  $\alpha_e(L_e)$  в этом случае не может быть одномерным.

Рассмотрим случай, когда  $\alpha_e(l) = \alpha(l) \cdot 1$  для всех  $l \in L$ , где  $\alpha(l)$  — одномерное представление петель, т. е. абелево калибровочное (электромагнитное) поле. В этом случае условия (4.3) переписываются как

$$\alpha(\sigma_1^{-1}l\sigma_1) = \alpha(\sigma_2^{-1}l\sigma_2) = \alpha(l),\tag{4.4}$$

$$C_2^{-1}C_1^{-1}C_2C_1 = e^{i\varphi},\tag{4.4'}$$

где обозначено  $\alpha(\lambda) = e^{i\varphi}$ . Именно этот случай будет нас интересовать в дальнейшем. Условия (4.4) означают, что электромагнитное поле  $\alpha(L)$  в пространстве Минковского является двоякопериодическим с периодами  $c_1, c_2$ . Условие (4.4') является ограничением на выбор операторов  $C_1, C_2$ . Покажем, что конкретизируя этот выбор можно описать любое двоякопериодическое электромагнитное поле в пространстве Минковского, безотносительно к модифицированному пространству-времени  $\mathcal{M}_e$ .

Двоякопериодическое электромагнитное поле в пространстве Минковского описывается одномерным представлением группы петель  $\alpha(L)$ , удовлетворяющим условиям (4.4). Локальные свойства частиц (кинематика их) в этом поле описываются индуцированным представлением  $U(P) = \alpha(L) \uparrow P$ , которое строится обычным образом. Но если мы хотим особо изучить свойства частиц при сдвиге на периоды, мы должны отдельно рассмотреть действие подгруппы  $L_e \subset P$  (которая в этом случае не имеет,

конечно, смысла стабилизатора точки). Для этого удобно воспользоваться транзитивностью индуцирования и провести индуцирование в два этапа:

$$U(P) = \alpha_c(L_c) \uparrow P, \quad \alpha_c(L_c) = \alpha(L) \uparrow L_c.$$

Общая схема дальнейших рассуждений вполне аналогична той, что применялась в предыдущем параграфе. Мы должны построить представление  $\alpha_c(L_c)$ , затем разложить его на неприводимые компоненты, которые мы символически обозначим через  $\alpha_c^0(L_c)$ . Тогда представления  $U_0(P) = \alpha_c^0(L_c) \uparrow P$  осуществляют разложение на неприводимые компоненты представления  $U(P)$ . Функции, в пространстве которых действует представление  $U_0(P)$ , суть обобщенные блоховские функции, и любую волновую функцию можно разложить по ним. Целью нашей является вывод свойств квазипериодичности, которыми обладают обобщенные блоховские функции. Не входя в детали и не приводя доказательств, изложим лишь результаты, которые получаются при реализации этой программы.

Представление  $U(P) = \alpha(L) \uparrow P$ , описывающее частицы в поле  $\alpha(L)$ , канонически реализуется в пространстве  $\mathcal{H}$  функций  $\Psi: P \rightarrow \mathbb{C}$  со структурным условием  $\Psi(p_l) = \alpha(l^{-1}) \Psi(p)$ . Можно перейти к локальным функциям  $\psi(x) = \alpha(x_P) \Psi(x_P)$ , на которые представление  $U(P)$  действует упорядоченными экспонентами от ковариантных производных. Опишем обобщенные блоховские функции, которые получаются в результате разложения на неприводимые  $\alpha_c(L_c)$ .

Каждая такая функция  $\psi_{\theta_1, \theta_2}(x)$  определяется двумя действительными числами  $\theta_1, \theta_2$  и выражается в виде суммы

$$\psi_{\theta_1, \theta_2}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n(x)$$

через вспомогательные функции  $\gamma_n(x)$ . Эти последние удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_n(x + c_1) = e^{-i\theta_1} V_1(x) \gamma_{n-1}(x); \quad \gamma_n(x + c_2) = e^{-i(\theta_2 - n\Omega)} V_2(x) \gamma_n(x),$$

где использованы обозначения

$$V_i(x) = \alpha(x_P \sigma_i) [\alpha(x_P)]^{-1}.$$

В остальном функции  $\gamma_n(x)$  произвольны. Их зависимость от параметров  $\theta_1, \theta_2$  не отмечена в обозначениях. Из определения обобщенных блоховских функций легко вывести свойства квазипериодичности, которыми они обладают:

$$\begin{aligned} \psi_{\theta_1, \theta_2}(x + c_1) &= e^{-i\theta_1} V_1(x) \psi_{\theta_1, \theta_2}(x); \\ \psi_{\theta_1, \theta_2}(x + c_2) &= e^{-i\theta_2} V_2(x) \psi_{\theta_1 - \Omega, \theta_2}(x). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Существенно, что эти свойства остаются неизменными при действии на такой набор волновых функций операторов вида  $U(p)$ . А это означает, что такого рода свойствами квазипериодичности могут обладать волновые функции, подчиненные некоторому динамическому принципу, например уравнению движения. Для этого необходимо лишь, чтобы внешнее поле  $A_\mu(x)$  входило в динамический принцип только через ковариантные производные (ср. обсуждение в конце предыдущего параграфа).

В проведенном анализе периоды  $\sigma_1, \sigma_2$  фигурируют неравноправно. Это происходит из-за их некоммутативности и из-за того, что в качестве стан-



дартного вида элемента  $l_c \in L_c$  было выбрано  $l_c = \sigma_2^n \sigma_1^n l$ . Если исходить из стандартной формы  $l_c = \sigma_1^n \sigma_2^n l$ , то периоды  $\sigma_1, \sigma_2$  поменяются ролями. При этом ведре вместо  $\lambda$  будет фигурировать  $\lambda^{-1}$ , т. е. параметр  $\Omega$  ведре заменится на  $(-\Omega)$ . Это дает альтернативный набор обобщенных блоховских функций  $\varphi_{\theta, \theta_2}(x)$  со свойствами квазипериодичности

$$\varphi_{\theta, \theta_2}(x + c_1) = e^{-i\theta_1} V_1(x) \varphi_{\theta, \theta_2 + \Omega}(x);$$

$$\varphi_{\theta, \theta_2}(x + c_2) = e^{-i\theta_2} V_2(x) \varphi_{\theta, \theta_2}(x).$$

Если векторы  $c_1, c_2$  (периоды поля) — чисто пространственные (временные компоненты этих векторов равны нулю), то пути  $c_1, c_2$  можно выбрать так, чтобы они лежали в плоскости постоянного времени. Тогда число  $\Omega$ , определенное формулой  $\alpha(\lambda) = e^{i\Omega}$ , пропорционально магнитному потоку через поверхность, натянутую на петлю  $\lambda O$ . Точнее,  $\Omega = e\Phi$ , где  $\Phi$  — магнитный поток (в обычных единицах измерения  $\Omega = (e/\hbar c) \Phi$ ). Поэтому существующие свойства обобщенных блоховских функций связаны с магнитной компонентой в периодическом поле  $\alpha(L)$ . Если магнитное поле отсутствует или имеет специальным образом подобранную величину, так что  $\Omega/2\pi$  — целое, то частица в периодическом поле описывается обычными блоховскими функциями.

Когда параметр  $\Omega/2\pi$  мало отличается от целого числа, магнитное поле не мало, однако можно пользоваться обычными блоховскими функциями. Такое условие всегда выполняется, если устанавливается периодическая структура магнитного поля в сверхпроводнике. Полное рассмотрение этого случая, включающее также исследование структуры энергетических уровней, содержится в работе [113].

**З а м е ч а н и е.** На практике периодические поля и блоховские функции встречаются обычно в нерелятивистских задачах. Нерелятивистскую теорию можно получить как предел релятивистской. Но можно получить ее и непосредственно, если рассматривать группу путей не в пространстве Минковского, а в 3-мерном евклидовом пространстве (см. в этой связи Замечание в конце предыдущего параграфа).

## § 5. Поле магнитного заряда

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое магнитным зарядом, и выясним, как оно описывается с помощью представления петель. Нашей целью является выяснение качественных отличий этого представления, тех его свойств, которые ведут к квантованию магнитных зарядов.

Гипотеза о существовании магнитных зарядов, или *магнитных монополей*, была высказана Дираком в 1931 г. [129]. Согласно этой гипотезе *магнитный заряд* создает вокруг себя магнитное поле, аналогичное кулоновскому полю точечного электрического заряда, только с заменой  $E$  на  $H$  и  $e$  на  $g$  (заряды — соответственно электрический и магнитный). Согласно теории Дирака, описание электрического заряда  $e$ , движущегося в поле магнитного заряда  $g$ , является непротиворечивым лишь в том случае, если выполняется соотношение \*)

$$eg = \frac{1}{2} n, \quad (5.1)$$

\*) В обычных единицах это условие имеет вид  $eg = \frac{1}{2} n \hbar c$ .

где  $n$  — целое число. Это условие называется условием *квантования Дирака*.

С тех пор неоднократно предпринимались попытки экспериментально обнаружить магнитные монополи. Все они привели к неудаче. Однако вера в существование магнитного монополя или по крайней мере родственного ему объекта не исчезает. Объясняется это тем, что нет никаких принципиальных запретов на существование монополя и в то же время теория монополей обладает рядом привлекательных черт. (Одной из них является квантование зарядов, которое согласуется с тем фактом, что в природе встречаются электрические заряды, только кратные заряду электрона).

Магнитное поле, создаваемое монополем, аналогично кулоновскому электрическому полю. Это значит, что вектор напряженности всегда направлен вдоль радиуса-вектора, идущего из точки, где расположен монополь, и обратно пропорционален квадрату расстояния от этой точки,  $\mathbf{H} = g\mathbf{x}/|\mathbf{x}|^3$ . Отсюда следует, что магнитный поток через поверхность сферы, в центре которой находится монополь, равен  $4\pi g$  и не зависит от радиуса сферы. По *теореме Остроградского—Гаусса* этой же величине равен магнитный поток через любую замкнутую поверхность, окружающую монополь. В силу сферической симметрии поля поток через любую часть сферы равен  $g(S/4\pi r^2)$ , где  $S$  — площадь этой части, а  $r$  — радиус сферы. В силу радиального направления поля магнитный поток через любую поверхность равен  $g\Omega$ , где  $\Omega$  — величина телесного угла, под которым видна эта поверхность из точки, где расположен монополь \*).

Теперь мы построим представление  $\alpha(L)$ , пользуясь только перечисленными фактами о поле магнитного заряда. Но прежде рассмотрим случай произвольного постоянного во времени магнитного поля.

Согласно теореме Стокса (см. § 10 гл. 6)

$$\int_{\partial\Sigma} A_\mu dx^\mu = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} F_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu}.$$

По определению тензора напряженности  $F_{\mu\nu}$  его пространственные компоненты выражаются через напряженность магнитного поля  $F_{ij} = \varepsilon_{ijk} H_k$  ( $i, j, k = 1, 2, 3$ ). Поэтому если поверхность  $\Sigma$  целиком лежит в одной гиперплоскости  $x^0 = \text{const}$  (при одном и том же времени), то  $\frac{1}{2} \int_{\Sigma} F_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} = \Phi(\Sigma)$  есть просто магнитный поток через поверхность  $\Sigma$ . В случае постоянного во времени магнитного поля остальные компоненты тензора напряженности равны нулю,  $F_{0i} = E_i = 0$ . Поэтому деформация поверхности  $\Sigma$

\*) Полный телесный угол следует вычислять как алгебраическую сумму, приписывая знак минус тем участкам поверхности, которые обращены своей внешней нормалью в сторону монополя.



во временном направлении не меняет величины этого интеграла. Другими словами, интеграл равен магнитному потоку через поверхность  $\pi(\Sigma)$ , где  $\pi$  — проекция пространства Минковского на гиперплоскость  $x^0=0$ , т. е.  $\pi(x^0, x) = (0, x)$ . Обозначим поток через спроектированную поверхность  $\pi(\Sigma)$  по-прежнему  $\Phi(\Sigma)$ . Таким образом, в статическом магнитном поле имеем

$$\int_{\partial \Sigma} A_\mu dx^\mu = \Phi(\Sigma).$$

Строя как обычно представление группы петель, описывающее такое поле, получим для этого представления выражение

$$\alpha(l) = e^{ie\Phi(\Sigma)}, \quad \partial \Sigma = l_0. \quad (5.2)$$

Теперь перейдем к магнитному полю, которое создает вокруг себя магнитный заряд  $g$ . Описание этого поля при помощи вектор-потенциала  $A_\mu(x)$  представляет известные трудности. В оригинальной работе Дирак использовал для этого потенциал, который не является везде регулярным. Именно, он сингулярен на некоторой кривой, которая из точки, в которой находится монополь, идет на бесконечность. Эта кривая обычно называется нитью. Нить, на которой «привязан» монополь, нарушает и симметрию картины, и калибровочную инвариантность, и релятивистскую инвариантность. Дирак справился с этой трудностью при помощи искусственного приема: он предположил, что волновые функции частиц, движущихся в поле монополя, обращаются в нуль там, где расположена нить. При этом теория становится внутренне непротиворечивой, а нить — ненаблюдаемой. В интересной работе [153] Ву и Янг предложили другое решение проблемы. Согласно этому решению монополь описывается двумя потенциалами  $A_\mu$ ,  $A'_\mu$ . Каждый из них регулярен в некоторой области, объединение этих областей покрывает все пространство-время, а в пересечении этих областей переход от одного потенциала к другому осуществляется при помощи калибровочного преобразования. В этом варианте теории отсутствие физически наблюдаемой нити становится особенно наглядным. В нашем подходе мы можем обойти трудность, положив в основу теории формулу (5.2). Для монополя в соответствии со сказанным выше это дает

$$\alpha(l) = e^{ieg\Omega(l)}, \quad (5.3)$$

где  $\Omega(l)$  — телесный угол, под которым петля  $\pi(l_0)$  видна из точки, в которой расположен монополь.

Формула (5.3) дает чисто геометрическое описание поля магнитного заряда. Мы могли бы начать прямо с этой формулы, приняв ее за определение поля, создаваемого магнитным зарядом. Все предыдущие рассуждения были лишь наводящими, разъясняли смысл этого определения. Теперь посмотрим, как из этого определения можно вывести условие квантования зарядов.

Рассмотрим любую петлю  $l \in L$ , и пусть  $\Omega(l)$  — это телесный угол, под которым видна эта петля. Тогда  $\alpha(l)$  выражается формулой (5.3). Теперь возьмем обратную петлю  $l^{-1}$ . Для нее должно быть  $\alpha(l^{-1}) = [\alpha(l)]^{-1}$ . Посмотрим, что дает в этом случае формула (5.3). Если уточнить данное ранее определение,  $\Omega(l)$  — это телесный угол, под которым видна внутренность петли  $\pi(l_0)$ . При этом внутренность петли, как обычно, определяется как поверхность, лежащая слева при обходе вдоль положительного направления петли (если смотреть со стороны внешней нормали). Если внутренность петли  $l$  видна под телесным углом  $\Omega(l)$ , то внешняя по отношению к этой петле область видна под углом  $4\pi - \Omega(l)$ . Если изменить положительное направление на петле на противоположное, то внутренняя и внешняя области поменяются местами. Следовательно, для обратной петли  $l^{-1}$  имеем  $\Omega(l^{-1}) = 4\pi - \Omega(l)$ . Подставляя это выражение в формулу (5.3) и используя свойство представления  $\alpha(l) \alpha(l^{-1}) = 1$ , получим

$$e^{ieq4\pi} = 1, \quad (5.4)$$

что эквивалентно условию квантования зарядов (5.1).

Этот вывод легко понять и с точки зрения формулы (5.2). В этой формуле поверхность  $\Sigma$  лежит внутри петли  $l_0$  (т. е. слева от нее). Для петли  $(l^{-1})_0$  внутренней будет другая поверхность  $\Sigma'$  (рис. 22). При этом объединение обеих поверхностей есть замкнутая поверхность, внутри которой находится монополю. Но это значит, что  $\Phi(\Sigma + \Sigma') = \Phi(\Sigma) + \Phi(\Sigma') = 4\pi g$ . Отсюда с учетом (5.2) и свойства представления следует также условие квантования (5.4).

Конечно, рассуждения с поверхностями, попадающими внутрь петли, полностью эквивалентны рассуждениям с телесным углом. Но они позволяют обнаружить важное обстоятельство. Поверхность  $\Sigma$  определяется неоднозначно, но можно взять любую из многих таких поверхностей, потому что для них  $\Phi(\Sigma)$  имеет одно и то же значение. Точно так же  $\Sigma'$  определяется неоднозначно. Но вот любая из поверхностей  $\Sigma$  кардинально отличается от любой из поверхностей  $\Sigma'$ . Отличаются они тем, что лежат по разные стороны от монополя. Таким образом, в качестве  $\Sigma$  можно взять любую из класса поверхностей, которые можно непрерывно деформировать друг в друга, не пересекая точку, где находится монополю. Если точку, где находится монополю, вообще исключить из пространства (выколоть), то слова «не пересекая точку, где находится монополю», можно опустить. В этом случае  $\Sigma$  — любая из класса поверхностей, имеющих данную границу и непрерывно деформируемых друг в друга.

Проведем вокруг монополя замкнутую поверхность, проходящую через точку  $O$ . Для простоты это может быть сфера. Рассмотрим последовательность петель с началом в точке  $O$ , лежащих на сфере (рис. 23). Первая петля имеет нулевой диаметр, т. е. фактически совпадает с постоянной кривой, с единицей группы петлей  $1 \in L$ . Каждая последующая петля лежит целиком вне предыдущей. Следовательно, диаметры петель возрастают,



и часть сферы, попадающая внутрь петли, возрастает. Наконец, появляется петля, совпадающая с большим кругом сферы. Далее в нашей последовательности петли лежат на другой стороне сферы. Диаметры их теперь уменьшаются, но часть сферы, попадающая внутрь петли, по-прежнему возрастает. Последняя петля  $1'$  имеет нулевой диаметр, т. е. совпадает с единицей группы петель. Но часть сферы, лежащая внутри этой петли, — это вся поверхность сферы. Применяя формулу (5.2) или (5.3), мы должны положить  $\alpha(1)=1$ ,  $\alpha(1')=e^{ieg4\pi}$ . Поскольку эти числа сопоставляются одному и тому же элементу — единице группы,

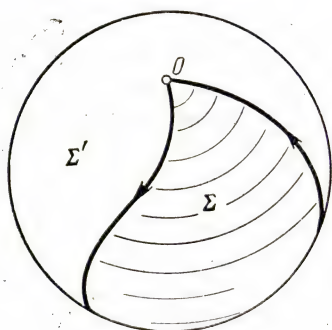


Рис. 22.

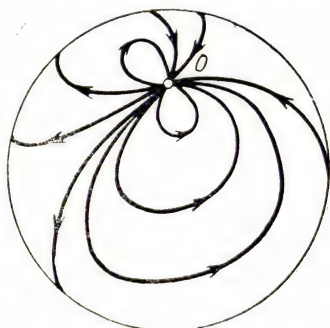


Рис. 23.

они оба должны быть равны единице. Мы еще раз получили условие квантования, но теперь особенно наглядно из-за непрерывности перехода от одного выражения к другому.

Вместе с тем последнее построение позволяет выделить в описании магнитного заряда существенный элемент, который можно положить в основу более общего определения. В данном случае мы имели последовательность петель, которая начиналась и кончалась одной и той же петлей. Другими словами — имели *замкнутую кривую в группе  $L$* . Обозначим эту кривую через  $\{l(\tau) | 0 \leq \tau \leq 1\}$ . Начало и конец ее — единица группы,  $l(0)=l(1)=1 \in L$ . Каждой точке этой кривой мы сопоставили число  $\alpha(l(\tau))$ . Разумеется, должно быть  $\alpha(l(1))=\alpha(l(0))=1$ . Это просто следствие непрерывности представления. Что является существенным — это то, что кривую  $l(\tau)$  нельзя стянуть в точку так, чтобы при этом стягивании сохранялся смысл функции  $\alpha(l(\tau))$ . Действительно, мы могли бы уменьшать постепенно радиус сферы, однако мы не можем уменьшить его до нуля, потому что этому препятствует находящийся внутри сферы монополю (или выколота из пространства точка).

Если мы все же будем уменьшать объем внутри замкнутой поверхности, лежащей в основе предыдущего построения, то эта поверхность будет постепенно «обжимать» со всех сторон монополю. При этом все элементы кривой  $l(\tau)$  будут сколь угодно

близки друг к другу (и к единице группы). Это будет замкнутая кривая, состоящая из очень близких друг к другу лассо. И тем не менее по мере прохождения вдоль этой последовательности петель  $\alpha(l(\tau))$  пройдет через те же значения  $\exp\{i\text{eg}\Omega(l(\tau))\}$ , что и для большой петли. Все дело в том, что эти значения лежат на замкнутой кривой в группе  $U(1)$  и эта кривая не стягивается в точку.

Можно следующим образом обобщить рассмотренное только что свойство представления  $\alpha(L)$ . Пусть  $\alpha(L)$  — представление группы петель операторами из некоторой группы  $G$  операторов, действующих в пространстве  $\mathcal{L}$ . Другими словами, для любого  $l \in L$  имеем  $\alpha(l) \in G$  — оператор в  $\mathcal{L}$ . Рассмотрим замкнутую кривую в группе  $L$ , начинающуюся и кончающуюся в групповой единице  $\{l(\tau) \in L \mid 0 \leq \tau \leq 1\}$ ,  $l(0) = l(1) = 1$ . Тогда  $\tau \mapsto \alpha(l(\tau))$  — замкнутая кривая в группе  $G$ . «Петля петель»  $\tau \mapsto l(\tau)$  заметает некоторую замкнутую поверхность  $\Sigma$  в  $\mathcal{M}$ . Наша задача — охарактеризовать конфигурации калибровочного поля (или, что то же, типы представлений  $\alpha(L)$ ), о которых можно было бы сказать, что они порождаются находящимися внутри  $\Sigma$  «калибровочным монополем».

Вспоминая то, что мы уже знаем о поле магнитного монополя, мы можем дать такое определение. Будем говорить, что внутри поверхности  $\Sigma$  находится источник поля, являющийся калибровочным аналогом магнитного монополя, если замкнутая кривая  $\tau \mapsto \alpha(l(\tau))$  в группе  $G$  не может быть непрерывной деформацией стянута в точку (или, как говорят, эта кривая негомотопна нулю). Для этого необходимо, чтобы в группе  $G$  существовали такого рода замкнутые кривые, т. е. чтобы эта группа была неодносвязной.

Если группа  $G$  односвязна, то представления  $\alpha(L)$  со значениями в этой группе не могут описывать калибровочных монополей. Это значит, что частица с калибровочным зарядом, описываемым группой  $G$ , не может чувствовать каких бы то ни было калибровочных монополей. С другой стороны, если группа  $G$  имеет  $n$  неэквивалентных (негомотопных друг другу) замкнутых контуров, то частица с калибровочным зарядом  $G$  может чувствовать действие калибровочных монополей  $n$  различных типов. Так, обычный электрический заряд, описываемый группой  $U(1)$ , реагирует на поле одного типа калибровочных монополей — обычных магнитных зарядов. Отметим, что определение калибровочного монополя, близкое к только что сформулированному, было предложено в работе Ву и Янга [153].

Все сказанное легко обобщается на случай любого количества магнитных монополей, расположенных в произвольных точках. В частности, нетрудно вывести для этого случая условие квантования зарядов. Пусть статическое магнитное поле описывается представлением  $\alpha(L)$ . Мы не будем делать никаких предположений относительно источников этого поля. Среди них могут быть и обычные источники (токи), и необычные (магнитные заряды). В любом случае  $\alpha(l)$  определяется формулой (5.2), причем в качестве  $\Sigma$  может фигурировать любая поверхность, натянутая на контур  $l_0$  (иначе представление было бы определено некорректно).

Будем непрерывно деформировать поверхность  $\Sigma$  так, чтобы по-прежнему было  $\partial\Sigma = l_0$ . При этом поток  $\Phi(\Sigma)$  через поверхность  $\Sigma$  будет оставаться неизменным до тех пор, пока деформация производится в области, где  $\text{div } \mathbf{H} = 0$ . Это условие нарушается лишь в точках, где расположены магнитные заряды, так что  $\Phi(\Sigma)$  изменится лишь в том случае, если при деформации поверх-



ности  $\Sigma$  она пройдет через точку, где находится магнитный заряд. Когда же поверхность  $\Sigma$  пересечет такую точку, поток изменится, причем приращение его будет в точности равно полному потоку, испускаемому данным зарядом:

$$\Phi(\Sigma) - \Phi(\Sigma') = 4\pi g.$$

Поскольку формула (5.2) по-прежнему применима и должна определять ту же самую величину, мы должны сделать вывод, что величина заряда  $g$  должна удовлетворять *условию квантования* (5.4) или (5.1). Теперь, однако, мы получили этот вывод, не предполагая, что имеется лишь один магнитный заряд и поле его обладает сферической симметрией. Более того, мы можем продолжить деформировать поверхность так, чтобы она по-прежнему опиралась на тот же замкнутый контур  $l_0$ . В момент, когда поверхность пересечет еще один магнитный заряд величиной  $g'$ , мы получим для него аналогичное условие  $2eg' = n'$ , только целое число  $n'$ , вообще говоря, иное.

Продолжая этот процесс, мы можем убедиться, что сколько бы ни было в пространстве магнитных монополей, заряды их  $g_1, g_2, \dots$  все удовлетворяют соотношению  $2eg_j = n_j$ . Здесь  $e$  — это электрический заряд той частицы, которая движется в магнитном поле и свойства которой описываются представлением  $U = \alpha(L) \uparrow P$ . Но, разумеется, в том же поле может оказаться частица с другим зарядом  $e'$ . Для нее также должны выполняться соотношения  $2e'g_j = n'_j$ . В итоге мы приходим к выводу, что в природе могут существовать лишь дискретные величины электрических и магнитных зарядов,

$$e_j = n_j e_0, \quad g_j = n_j g_0, \quad (5.5)$$

причем *элементарные заряды* удовлетворяют условию  $e_0 g_0 = 1/2$ . Магнитные заряды, несмотря на упорные поиски, до сих пор не обнаружены. Однако экспериментально наблюдаемая дискретность электрических зарядов служит косвенным подтверждением их существования.

## § 6. Дифференциальные формы и теорема Стокса

В предыдущих параграфах были рассмотрены примеры, которые дают некоторое представление о том, какими свойствами обладают представления группы путей в том случае, если в пространстве, где проходят пути, имеются препятствия. В случае эффекта Ааронова—Бома препятствием является соленоид. Область, занимаемая им, фактически вырезается из пространства-времени, так как поле рассматривается лишь вне соленоида. Если соленоид считается бесконечно тонким, то эта область — двумерная плоскость в пространстве-времени (мировая поверхность нити соленоида). Это препятствие приводит к тому, что петлю, охватывающую соленоид, нельзя стянуть в точку. В случае магнитного

монополю препятствием является мировая линия соленоида (прямая в пространстве-времени). Замкнутая поверхность, внутри которой находится монополь, не может быть стянута в точку. На языке путей эта замкнутая поверхность описывается как петля петель (замкнутая кривая в группе  $L$ ). Наконец, в пространстве  $M_c$  с цилиндрической топологией сама топология препятствует тому, чтобы стянуть в точку замкнутую кривую  $c$ .

Во всех этих случаях мы видели, что наличие препятствий приводит к тому, что оказывается возможным новый тип представления группы петель  $\alpha$  ( $L$ ). Если представление коммутативно, т. е. описывает электромагнитное поле, то особые свойства представления хорошо описываются на языке дифференциальных форм и некоторых теорем, выражающих свойства этих форм. В § 10 гл. 6 мы уже видели, что теорема Стокса для абелевых дифференциальных форм имеет непосредственный аналог, формулирующийся на языке представлений группы петель. Теперь мы исследуем подобные аналогии более систематически.

Мы не можем здесь систематически излагать теорию дифференциальных форм. Но все же упомянем очень кратко и поверхностно некоторые сведения из этой теории. Те, кто захочет глубже понять то, о чем будет идти речь, может обратиться к специальной литературе [26—30]. После формулирования теоремы Стокса и де Рама из теории обычных (абелевых) дифференциальных форм будет показано, как аналогичные свойства неабелевых дифференциальных форм формулируются в терминах представлений группоида путей.

Рассмотрим  $n$ -мерное дифференцируемое многообразие  $\mathcal{X}$ . Если задана система координат  $x^1, \dots, x^n$  в некоторой области этого многообразия, то внешняя дифференциальная форма ранга  $r$  в этой области задается следующим образом:

$$\omega = \omega_{\mu_1 \dots \mu_r}(x) dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}. \quad (6.1)$$

Здесь  $\wedge$  обозначает внешнее умножение дифференциальных форм. В данном случае перемножаются формы ранга 1 (1-формы)  $dx^\mu$ . Внешнее умножение 1-форм обладает свойством антисимметричности, и произведение дифференциалов  $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$  антисимметрично по всем индексам. Функция  $\omega_{\mu_1 \dots \mu_r}(x)$  может и не быть антисимметричной, но симметричная часть ее не дает вклада и может быть при желании исключена.

На этом этапе внешнее произведение дифференциалов может пониматься просто как символ, а дифференциальная форма (6.1) — как символический способ записи антисимметричного тензора  $\omega_{\mu_1 \dots \mu_r}(x)$  (или антисимметричной части от этого тензора). Точно так же в главе 5 мы вводили векторное поле  $A = A_\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  как символическую запись величин  $A_\mu(x)$ . Эта

запись удобна тем, что в ней содержатся правила перехода к другой системе координат. Точно так же и выражение (6.1) пока-



зывает, как должны меняться величины  $\omega_{p_1 \dots p_r}(x)$  при переходе к другой системе координат. Однако, кроме этого, величину  $A$  можно понимать как дифференциальный оператор, тем самым вложив в нее самостоятельный смысл. Точно так же и дифференциальной форме (6.1) можно придать самостоятельный смысл. Ее можно понимать как меру, которую можно интегрировать.

Из-за антисимметрии по индексам форма  $\omega$  не может иметь ранг выше, чем размерность многообразия  $n$ . В случае формы максимального ранга из-за той же антисимметрии форма определяется единственной функцией:

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_{p_1 \dots p_n}(x) dx^{p_1} \wedge \dots \wedge dx^{p_n} = \\ &= n! \omega_{12 \dots n}(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n.\end{aligned}\quad (6.2)$$

Это выражение и кладется в основу определения интегрирования форм. Именно, интеграл от формы максимального ранга по определению равен

$$\int_x \omega = n! \int \dots \int \omega_{12 \dots n}(x^1, x^2, \dots, x^n) dx^1 dx^2 \dots dx^n, \quad (6.3)$$

где справа — обычный  $n$ -кратный интеграл.

**З а м е ч а н и я.** 1) Если многообразие не покрывается одной системой координат, то интеграл от формы  $\omega$  по всему  $\mathcal{X}$  представляется в виде суммы интегралов по некоторому семейству областей, в каждой из которых интеграл понимается в смысле (6.3).

2) В силу закона преобразования величин  $\omega_{p_1 \dots p_n}(x)$  при переходе от одной системы координат к другой выражение (6.3) при таком переходе либо не меняется, либо меняет знак. Чтобы исключить неоднозначность, пользуются только такими системами координат, что переходы между любыми двумя системами характеризуются положительным детерминантом перехода

$$\frac{\partial(x'^1, \dots, x'^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \dots \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \dots \end{vmatrix} > 0.$$

Переход от одной системы координат к другой, если он производится в пределах такого класса систем, вообще не меняет выражение (6.3). На связном многообразии может существовать всего два таких класса, и выбор одного из них называется выбором *ориентации* на многообразии. Можно сказать, следовательно, что при выборе ориентации формула (6.3) определяет интеграл от формы вполне однозначно. Некоторые многообразия нельзя покрыть системами координат из одного и того же класса. Такие многообразия называются *неориентируемыми*. Следовательно, определение (6.3) годится только для ориентируемых многообразий.

Мы определили лишь способ интегрирования формы максимального ранга по всему многообразию. Теперь уже легко опреде-

лить интегрирование по подмногообразию меньшей размерности. Пусть  $\omega$  — форма ранга  $r < n$  и требуется интегрировать ее по подмногообразию  $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$  размерности  $r$ . Для этого необходимо лишь ввести на подмногообразии  $\mathcal{U}$  параметризацию. Обозначим параметры через  $y^1, \dots, y^r$ . Уравнение подмногообразия  $\mathcal{U}$  можно записать в виде  $x^\mu = f^\mu(y^1, \dots, y^r)$ . Дифференцируя, получаем  $dx^\mu = f^\mu_{, \nu}(y) dy^\nu$ . После подстановки этих выражений в (6.1) получается форма максимального ранга на многообразии  $\mathcal{U}$ , и ее можно интегрировать по тем правилам, которые описаны выше.

Для внешних дифференциальных форм определяется операция *внешнего дифференцирования*, которая обозначается через  $d$  и превращает форму ранга  $r$  в форму ранга  $r+1$ . Если форма  $\omega$  определяется формулой (6.1), то форма  $d\omega$  равна

$$d\omega = \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r}(x) \right] dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}. \quad (6.4)$$

Таким образом, операция внешнего дифференцирования сводится к тому, что коэффициентная функция дифференцируется и добавляется один дифференциал, а появившиеся индексы свертываются друг с другом. По определению появившийся дифференциал ставится впереди. Для общности удобно функции на многообразии считать формами нулевого ранга. Если  $f(x)$  — такая функция, то внешний дифференциал от нее определяется как форма ранга 1

$$(\text{или } 1\text{-форма}) \quad df = \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu} dx^\mu.$$

Операции  $d$ , действующей на формы, соответствует операция  $\partial$ , действующая на многообразия. Если  $\mathcal{X}$  — некоторое многообразие с границей, то  $\partial\mathcal{X}$  — его граница. Операция  $\partial$ , следовательно, понижает размерность многообразия на единицу. Двойственность операций  $d$  и  $\partial$  по отношению друг к другу проявляется в том, что имеет место *теорема* или *формула Стокса*:

$$\int_{\mathcal{X}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{X}} \omega. \quad (6.5)$$

Если  $\mathcal{X}$  — многообразие размерности  $n$ , то форма  $\omega$  в этой формуле должна иметь ранг  $n-1$ . Теорема Стокса является чрезвычайно полезной для физики. Частными случаями ее являются и то, что называют формулой Стокса в обычном курсе анализа, и теорема Гаусса—Остроградского, и многие другие интегральные соотношения, связывающие интеграл по многообразию с интегралом по границе этого многообразия. В частности, теорема, доказанная в начале § 10 гл. 6, является также частным случаем теоремы Стокса. Теперь мы можем сказать, что использованный там «элемент площади»  $d\sigma^{\mu\nu} = d_1 x^\mu d_2 x^\nu - d_2 x^\mu d_1 x^\nu$  есть не что иное, как форма  $dx^\mu \wedge dx^\nu$ , имеющая ранг 2. Стоит заметить, что значок  $d$  в обозначении  $d\sigma^{\mu\nu}$  не есть значок внешней производной,



так как форму  $dx^u \wedge dx^v$  нельзя представить как внешнюю производную от какой-либо формы ранга 1.

**З а м е ч а н и е.** Чтобы теорема Стокса имела определенный смысл, требуется связать ориентацию границы  $\partial \mathcal{X}$  с ориентацией многообразия  $\mathcal{X}$ . Это делается так. В многообразии  $\mathcal{X}$  выбирается такая система координат  $x^1, \dots, x^n$ , что граница  $\partial \mathcal{X}$  описывается уравнением  $x^n = 0$ , а точки многообразия  $\mathcal{X}$  соответствуют неотрицательным значениям координаты  $x^n$ . Тогда совокупность чисел  $x^1, \dots, x^{n-1}$  может служить системой координат на  $\partial \mathcal{X}$ . Этой системой координат и определяется ориентация  $\partial \mathcal{X}$ , при которой справедлива теорема Стокса (6.5).

## § 7. Теоремы де Рама

Теорема Стокса во многих случаях позволяет сразу сделать заключение о том, что некоторый интеграл равен нулю, или о том, что два интеграла равны друг другу. Например,  $\int_{\partial \mathcal{X}} \omega = 0$ , если

$d\omega = 0$ . Форма, внешний дифференциал которой равен нулю, называется *замкнутой*. Поэтому сделанное утверждение можно

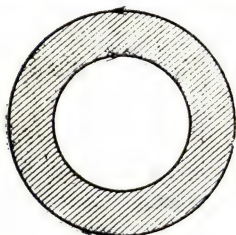


Рис. 24.

сформулировать так: интеграл от замкнутой формы по любой границе равен нулю. При этом, однако, следует помнить, что не всякая замкнутая поверхность является границей некоторой области. Например, сферическая поверхность в евклидовом пространстве является границей шара, заключенного внутри нее. Но если мы выколем из евклидова пространства всего одну точку — центр этого шара, то в полученном таким образом многообразии (евклидово пространство без этой точки) сферическая

поверхность не является границей никакой области. Границей в этом случае является поверхность, состоящая из двух сфер с тем же центром, причем ориентация этих сфер противоположны (рис. 24). Совокупность этих двух сфер, рассматриваемая как единая замкнутая поверхность, является границей сферического слоя. Таким образом, в евклидовом пространстве интеграл по сфере от замкнутой формы равен нулю, а в том же пространстве с выколотой точкой может быть отличен от нуля. В этом случае можно лишь утверждать, что интегралы по сферам разных радиусов равны друг другу.

На первый взгляд кажется невозможным, что изменение топологии так влияет на интегралы. На самом деле, однако, это ситуация, очень привычная для физиков. Интеграл от формы  $\omega$  по сфере есть поток некоторого поля через эту сферу, а условие  $d\omega = 0$  означает отсутствие источников поля. Если форма задана и является замкнутой во всем евклидовом пространстве, то это

значит, что нигде в этом пространстве нет источников поля. В таком случае интеграл по любой сфере равен нулю. Если же форма замкнута лишь в пространстве с выколотой точкой, то это значит, что при попытке продолжить форму на все пространство в одной точке может оказаться  $d\omega \neq 0$ , т. е. в этой точке может находиться источник поля. Поэтому поток через сферу может быть отличен от нуля, и можно сделать лишь более слабое утверждение: что потоки через сферы разных радиусов равны друг другу.

Систематическое рассмотрение такого рода вопросов производится на основе теорем де Рама. Для их формулировки кроме понятия замкнутой формы вводится понятие точной формы. Форма  $\omega$  называется *точной*, если существует такая форма  $\chi$ , что  $d\chi = \omega$ . Ясно, что ранг формы  $\chi$  должен быть на единицу меньше ранга формы  $\omega$ . Повторное применение операции внешнего дифференцирования всегда дает нуль, что выражают символическим равенством  $dd=0$ . Отсюда следует, что точная форма всегда является замкнутой. Обратное верно не всегда.

Соответствующая терминология вводится и для классификации многообразий. В этом случае ключевой является операция  $\partial$ , сопоставляющая каждому многообразию его границу. Многообразие  $B$  называется *границей*, если существует многообразие  $D$  такое, что  $\partial D = B$ . Многообразие  $C$  называется *циклом*, если  $\partial C = 0$ , т. е. если границей его является пустое множество. Цикл — это то, что в физической литературе обычно называют замкнутым многообразием. Примером цикла является сферическая поверхность. Операция  $\partial$  также обладает свойством  $\partial\partial=0$ , поэтому всякая граница является циклом. Но обратное, вообще говоря, неверно.

Теоремы де Рама касаются интегралов от замкнутых форм по циклам. Из теоремы Стокса следует, что *интеграл по любому циклу от точной формы равен нулю*. Действительно,  $\int_C d\chi = \int_{\partial C} \chi$ .

Но для цикла  $\partial C = 0$ , поэтому такой интеграл обращается в нуль. С другой стороны, *интеграл от любой замкнутой формы по границе равен нулю*. Это следует из того, что  $\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$ , а если

форма замкнута, то  $d\omega = 0$ . Первая теорема де Рама представляет собой формулировку обратного утверждения. Пусть  $\omega$  — замкнутая форма (т. е.  $d\omega = 0$ ), а  $C$  — цикл (т. е.  $\partial C = 0$ ). Интеграл от замкнутой формы по циклу называется *периодом* этой формы, соответствующим данному циклу. *Первая теорема де Рама* содержит два утверждения: 1) Если все периоды замкнутой формы  $\omega$  равны нулю, то эта форма является точной, т. е.  $\omega = d\chi$ . 2) Если для некоторого цикла  $C$  соответствующие ему периоды для всех замкнутых форм равны нулю, то этот цикл является границей,  $C = \partial D$ .

Вторая теорема де Рама отвечает на вопрос о том, насколько замкнутая форма определяется своими периодами, т. е. интегра-



лами по циклам. Если две формы  $\omega$ ,  $\omega'$  отличаются на точную форму, т. е.  $\omega' - \omega = d\chi$ , то по теореме Стокса интегралы от этих форм по любому циклу совпадают, так как  $\int_C (\omega' - \omega) = \int_C d\chi = 0$ .

*Вторая теорема де Рама* формулирует обратное утверждение. Она утверждает, что если две замкнутые формы  $\omega$ ,  $\omega'$  имеют одни и те же периоды (т. е. интегралы от них по любому циклу совпадают), то эти формы отличаются на точную форму,  $\omega' - \omega = d\chi$ . Более того, для этого достаточно совпадения периодов, соответствующих полному набору базисных циклов.

**З а м е ч а н и е.** Если совпадают интегралы от двух форм по любым циклам, то эти формы отличаются на точную форму даже независимо от того, являются ли они замкнутыми. В случае замкнутых форм для этого достаточно совпадения интегралов по базисным циклам.

Чтобы понять, что такое базисные циклы, следует ввести еще некоторые определения. Суть их состоит в том, что если известен интеграл от замкнутой формы по одному циклу, то интеграл по другому циклу в некоторых случаях сразу можно найти. Например, если второй цикл является  $n$ -кратным повторением первого цикла, то интеграл по нему получается умножением на  $n$ . (Например, контур,  $n$  раз оббегающий окружность.) Число  $n$  может быть и отрицательным, что означает изменение ориентации и затем  $n$ -кратное повторение. (Окружность пробегается в обратном направлении.) Кроме того, циклы можно складывать, тогда складываются соответствующие интегралы. (Например, контур, представляющий собой обход вдоль одной окружности и затем обход вдоль другой окружности.) Таким образом, если известны интегралы от некоторой формы по циклам  $C_1, \dots, C_s$ , то сразу определяются интегралы по любому циклу вида  $n_1 C_1 + \dots + n_s C_s$ .

Если форма замкнута, то интегралы от нее по двум циклам могут быть равны уже в силу теоремы Стокса. Это происходит в том случае, если циклы отличаются на границу:  $C' - C = \partial D$ . Знак минус здесь означает переход к противоположной ориентации. Теперь можно дать определение. Набор  $C_1, \dots, C_s$  циклов размерности  $k$  называется набором *базисных циклов*, если произвольный  $k$ -мерный цикл отличается на границу от цикла вида  $n_1 C_1 + \dots + n_s C_s$ .

На этом основано определение гомологии. Два цикла  $C$ ,  $C'$  называются гомологичными, если они отличаются на границу,  $C' - C = \partial D$ . В соответствии с этим все циклы разбиваются на классы гомологичных друг другу циклов. Если все циклы размерности  $k$  в многообразии  $\mathcal{M}$  разбить на классы гомологичных друг другу циклов, то множество классов называется  $k$ -мерной *группой гомологий*  $H_k(\mathcal{M})$ . Это абелева группа, групповая операция в ней записывается как сложение и определяется через операцию сложения циклов. Роль единицы играет класс циклов, гомологичных нулевому циклу, т. е. таких, которые сами являются границами. Набор  $k$ -мерных циклов  $C_1, \dots, C_s$  называется набором базисных циклов, если произвольный класс из группы  $H_k$  представляет собой класс циклов, гомологичных циклу  $n_1 C_1 + \dots + n_s C_s$ .

Вся группа  $H_k$  в этом случае изоморфна группе  $\mathbb{Z} + \dots + \mathbb{Z}$  ( $n$  слагаемых). Например, в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  с выколотой точкой есть только один базисный цикл размерности  $n-1$ . В качестве него может служить сфера с центром в этой точке. Группа  $H_{n-1}$  в этом случае изоморфна  $\mathbb{Z}$ .

Ясно, что интегралы от замкнутой формы по любому циклу из одного класса гомологичности равны друг другу. Другими словами, периоды замкнутой формы определяют представление группы гомологий. Все периоды определяются через  $s$  базисных периодов. Именно поэтому для того, чтобы удостовериться, что две замкнутые формы отличаются на точную форму, достаточно проверить, что совпадают их интегралы по базисным циклам.

Из сказанного ясно, что замкнутые формы можно классифицировать по аналогии с тем, как классифицируются циклы. Эта классификация носит название теории когомологий. Все замкнутые формы разбиваются на классы так, что в один класс входят формы, различающиеся на точные формы,  $\omega' - \omega = d\chi$ . Множество классов называется *группой когомологий* и обозначается  $H^k(\mathcal{M}, \mathbb{R})$  (символ  $\mathbb{R}$  означает, что рассматриваются вещественнозначные формы). Размерность пространства  $H^k(\mathcal{M}, \mathbb{R})$  называется  $k$ -мерным *числом Бетти* многообразия  $\mathcal{M}$ . В соответствии со второй теоремой де Рама это число равно рангу группы гомологий  $H_k(\mathcal{M})$ .

## § 8. Неабелевы дифференциальные формы и представления группоидов путей

Перейдем теперь к рассмотрению дифференциальных форм, коэффициенты функций которых являются не числами, а элементами некоторой некоммутативной алгебры. Конечно, для интегралов от таких форм также справедливы теоремы, аналогичные теоремам Стокса и де Рама, поскольку для этих теорем существенна только операция сложения, но не умножения. Однако мы уже видели, что в калибровочной теории (или, с точки зрения математиков, в теории связностей) фигурируют не сами интегралы от форм, а *упорядоченные экспоненты* от таких интегралов. Поэтому возникает задача сформулировать аналоги теорем Стокса и де Рама именно для этих объектов. В § 10 гл. 6 уже был сформулирован аналог теоремы Стокса, но там рассматривался лишь случай, когда многообразием является пространство Минковского (или другое аффинное пространство). Теперь мы рассмотрим неабелевы формы (формы связности) в произвольном многообразии  $\mathcal{M}$ . Будет показано, что свойства, аналогичные теоремам Стокса и де Рама, естественно формулируются в терминах представлений группоидов путей.

Начнем с того, что запишем обычную теорему Стокса (для абелевых форм) не для самих интегралов, а для экспонент от них. Нас будут интересовать пока лишь формы ранга 0 и 1. Будем обозначать их соответственно через  $\chi = \chi(x)$  и  $A = A_p(x) dx^p$ . Понадобятся нам также следующие многообразия (точнее, подмногообразия в  $\mathcal{M}$ ):  $x$  (нуль-мерное многообразие, т. е. точка),  $p_x^{x'}$  (путь с началом  $x$  и концом  $x'$ ) и  $\Sigma$  (двумерная поверхность). Правда, в теореме Стокса должен фигурировать не путь, как он определен в § 1 гл. 6, а индивидуальная кривая. Однако нетрудно видеть, что интеграл от 1-формы по любой кривой, входящей в класс  $p_x^{x'}$ , имеет одно и то же значение. Поэтому замена кривой



на путь является корректной. Соответствующие формулы Стокса имеют вид

$$\int_{p_x^{x'}} d\chi = \int_{\partial p_x^{x'}} \chi = \bar{\chi}(x') - \chi(x),$$

$$\int_{\Sigma} dA = \int_{\partial \Sigma} A.$$

Беря экспоненты от этих равенств, получим

$$\exp \left\{ i \int_{p_x^{x'}} d\chi \right\} = e^{i\chi(x')} e^{-i\chi(x)}, \quad (8.1)$$

$$\exp \left\{ i \int_{\Sigma} A \right\} = \exp \left\{ i \int_{\partial \Sigma} A \right\}. \quad (8.2)$$

Нетрудно узнать в этих формулах некоторые уже знакомые нам объекты. Основным из них является экспонента от одномерного интеграла:

$$\alpha(p) = \alpha(p_x) = \alpha(p_x^{x'}) = \exp \left\{ i \int_{p_x^{x'}} A \right\},$$

которая задает представление группоида путей. В частности, если  $x' = x$ , то  $\alpha(l_x)$  — представление подгруппы петель с началом в точке  $x$ . Если две 1-формы  $A, A'$  имеют одинаковые периоды, т. е. интегралы от них вдоль любых петель совпадают, то эти формы задают одно и то же представление подгруппы петель  $\alpha(l_x)$ , хотя соответствующие им представления группоида путей  $\alpha(p_x^{x'})$ ,  $\alpha'(p_x^{x'})$  различны. С другой стороны, по теореме де Рама такие формы различаются на точную форму:  $A' - A = d\chi$ . Это значит, что  $A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \chi_{,\mu}(x)$ . Используя (8.1), запишем это так:

$$\alpha'(p_x^{x'}) = V(x') \alpha(p_x^{x'}) V^{-1}(x),$$

где обозначено  $V(x) = e^{i\chi(x)}$ . Это полностью совпадает с формулой (9.6) гл. 6 для калибровочного преобразования. Таким образом, вторая теорема де Рама соответствует калибровочному преобразованию в теории представлений группоида путей.

Рассмотрим теперь вторую формулу Стокса (8.2), которая связывает одномерный и двумерный интегралы. Слева в этой формуле стоит представление петли  $\alpha(l_x)$ , а справа в интеграле фигурирует 2-форма, связанная с напряженностью поля:

$$dA = F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \text{ где для абелева поля } F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}.$$

Таким образом, эту формулу можно переписать следующим образом:

$$\alpha(l_x) = \exp \left\{ i \int_{\Sigma} F \right\}, \text{ если } \partial \Sigma = l_x.$$

Очень существенно, что эта формула справедлива лишь для таких петель (одномерных циклов), которые являются границами. Если напряженность поля равна нулю,  $F=dA=0$ , то это не значит, что представление группы петель тривиально. Это означает лишь, что представление подгруппы петель, являющихся границами, тривиально.

Пусть  $F=dA=0$ , т. е. форма  $A$  замкнута. Тогда по теореме де Рама задание ее периодов, соответствующих базисным петлям, определяет эту форму по модулю точных форм (т. е. остается лишь произвол, состоящий в добавлении  $d\chi$ ). Мы видели выше, что такой произвол несуществен для определения представления петель  $\alpha(l_x)$ . Следовательно, *вторую теорему де Рама* можно сформулировать так: если представление группы петель  $\alpha(l_x)$  тривиально для подгруппы петель, являющихся границами, то оно полностью определяется своими значениями для набора базисных петель. В предыдущих параграфах мы встречались с представлениями такого типа. Например, представление, описывающее поле Ааронова—Бома, определяется своим значением для любой петли, обходящей вокруг магнитного потока один раз.

Теперь можно попытаться перенести эти наблюдения на случай неабелевых форм (форм связности). Те утверждения, которые будут сформулированы, большей частью уже доказаны, так как многие рассуждения, проводившиеся ранее, справедливы не только в пространстве Минковского, но в равной мере и в произвольном многообразии.

Неабелевым аналогом 1-формы является представление группоида путей со значениями в некоторой группе,  $\alpha(p_{x'}^{x'}) \in G$ . Аналогом точной 1-формы является представление группоида путей  $\alpha_0(p_{x'}^{x'})$ , тривиальное для всех петель,  $\alpha_0(l_x)=0$ . Для каждого такого представления существует функция на многообразии со значениями в группе,  $V(x) \in G$ , такая, что

$$\alpha_0(p_{x'}^{x'}) = V(x') V^{-1}(x). \quad (8.3)$$

Это аналог первой формулы Стокса (переход от одномерного интеграла к нульмерному). Если имеется два представления группоида  $\alpha(p_{x'}^{x'})$ ,  $\alpha'(p_{x'}^{x'})$ , которые совпадают на всех петлях,  $\alpha'(l_x) = \alpha(l_x)$ , то найдется такая функция  $V(x') \in G$ , что

$$\alpha'(p_{x'}^{x''}) = V(x'') \alpha(p_{x'}^{x''}) V^{-1}(x'). \quad (8.4)$$

Это аналог *второй теоремы де Рама* (точнее, несколько более общего утверждения; см. Замечание после второй теоремы де Рама, § 7).

Перейдем теперь ко второй формуле Стокса (преобразование линейного интеграла в двумерный). Неабелев вариант этой формулы был выведен в § 10 гл. 6. То, что там рассматривались поля в пространстве Минковского, не имеет значения, потому что доказательство без труда переносится на случай произвольного многообразия. Единственное (очень существенное) отличие со-



стоит в том, что в пространстве Минковского любая петля факторизуется в произведение бесконечного числа бесконечно малых лассо, каждое из которых является границей бесконечно малой площадки. В произвольном многообразии это, вообще говоря, неверно.

Оказывается, что факторизуемость петли в произведение лассо связана с другим характерным свойством — с тем, что петля может быть стянута в точку или, как говорят, петля гомотопна нулю. Говорят, что две кривые гомотопны друг другу, если их можно перевести друг в друга непрерывной деформацией. Если  $\{x(\sigma) | 0 \leq \sigma \leq 1\}$  и  $\{x'(\sigma) | 0 \leq \sigma \leq 1\}$  — две непрерывные кривые, то гомотопия между ними означает наличие такого 2-параметрического семейства точек  $\{x(\sigma, \tau) | 0 \leq \sigma, \tau \leq 1\}$ , непрерывно зависящих от параметров, что  $x(\sigma, 0) = x(\sigma)$ ,  $x(\sigma, 1) = x'(\sigma)$ . Если петля может быть непрерывно стянута в точку, то это означает, следовательно, что на нее можно натянуть поверхность, непрерывно параметризованную двумя параметрами. Но тогда петлю можно факторизовать в произведение лассо, располагая их последовательно в соответствии с этой параметризацией (как описано в гл. 6, § 10). Таким образом, всякая стягиваемая петля является факторизуемой. Верно и обратное. Если петля факторизуется в произведение бесконечно малых лассо, ограничивающих бесконечно малые площадки, то отбрасывая эти площадки одну за другой мы стянем петлю в точку.

Если все петли на многообразии  $\mathcal{M}$ , имеющие общее начало  $x$ , разбить на классы гомотопных друг другу петель, а на множестве классов определить умножение как последовательное прохождение петель (как это делалось для группоида путей в гл. 6, § 1), то получившееся множество классов представляет собой фундаментальную группу  $\pi_1(\mathcal{M}, x)$ . Очевидно, что эта группа может быть получена как фактор-группа группы  $L_x \subset \hat{P}$  по подгруппе петель, стягиваемых в точку:  $\pi_1(\mathcal{M}, x) = L_x / (L_0)_x$ . В связном многообразии все группы  $\pi_1(\mathcal{M}, x)$ ,  $x \in \mathcal{M}$ , изоморфны, так что можно писать  $\pi_1(\mathcal{M})$ . Ясно, что фундаментальная группа должна играть важную роль в теории неабелевых форм и интегралов от них.

Имея в виду сказанное, мы не будем заново доказывать теорему Стокса, а сразу сформулируем результаты. Пусть петля  $l_x$  является границей  $l_x = \partial \Sigma$  и стягивается в точку по поверхности  $\Sigma$ . Тогда оператор, сопоставляемый петле, можно представить в виде упорядоченной экспоненты от двумерного интеграла:

$$\alpha(l_x) = P \exp \left\{ i \int_{l_x} A \right\} = P \exp \left\{ i \int_{\Sigma} \mathcal{F} \right\}. \quad (8.5)$$

Это равенство требует некоторых пояснений, которые мы сейчас дадим.

Первый элемент этого равенства — оператор, заданный постольку, поскольку известно представление группоида путей.

Второй элемент равенства выражает оператор представлений через неабелеву 1-форму  $A = A_\mu(x) dx^\mu$  (здесь  $A_\mu(x)$  — элементы алгебры Ли группы  $G$ ). Такая форма может не существовать во всем многообразии  $\mathcal{M}$ , но в некоторой окрестности поверхности  $\Sigma$  она всегда существует \*). В третьем элементе равенства следует пояснить способ упорядочения и определение 2-формы  $\mathcal{F}$ . Это делается так. Поскольку существует поверхность  $\Sigma$ , натянутая на петлю  $l_x$ , эту петлю всегда можно представить в виде бесконечного произведения бесконечно малых лассо, лежащих целиком в  $\Sigma$ :

$$l_x = \lim_{N \rightarrow \infty} P \prod_{j=1}^N (l(p_j)_x)^{-1} (\delta \lambda_j)_{x_j} (p_j)_x,$$

где  $x_j = p_j x$ . Выбрав любую из такого рода факторизаций (результат не зависит от выбора), следует определить двумерный интеграл как

$$P \exp \left\{ i \int_{\Sigma} \mathcal{F} \right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} P \prod_{j=1}^N \exp i \int_{\delta \Sigma_j} \mathcal{F} (p_j)_x. \quad (8.6)$$

Здесь  $\delta \Sigma_j$  — площадка (в пределе бесконечно малая), натянутая на петлю  $(\delta \lambda_j)_{x_j}$ , т. е.  $\partial(\delta \Sigma_j) = (\delta \lambda_j)_{x_j}$ , а форма  $\mathcal{F}(p_x')$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(p_x') &= [\alpha(p_x')]^{-1} F(p_x) \alpha(p_x'), \\ F &= DA = dA - iA \wedge A \end{aligned}$$

или, в координатах,

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} - i[A_\mu, A_\nu].$$

В § 10 гл. 6 это определение применительно к аффинному пространству было пояснено гораздо подробнее. Оно является, пожалуй, слишком громоздким. В следующем параграфе мы покажем, на каком пути его можно упростить. Сейчас же воспользуемся некоторыми его очевидными свойствами, чтобы разъяснить понятие, которое в неабелевом случае аналогично понятию замкнутой 1-формы.

Представление группоида  $\alpha(p_x')$ , которое тривиально на всех петлях, являющихся границами (и стягиваемых),

$$\alpha(l_x) = 1 \text{ при } l_x = \partial \Sigma,$$

является аналогом замкнутой 1-формы. Такое представление соответствует нулевой напряженности калибровочного поля,  $\mathcal{F}(p) \equiv 0$  (или  $F_{\mu\nu}(x) \equiv 0$ ). При этом, однако, петлям, не являю-

\*) Можно считать, что форма  $A$  существует во всем многообразии, однако в том смысле, что при переходе от одной системы координат к другой ее коэффициенты функции могут подвергаться калибровочному преобразованию. Такое определение было предложено в работе Ву и Янга [153], мы уже говорили об этом в связи с описанием магнитного заряда (§ 5). Нам, однако, потребуется лишь форма в окрестности поверхности  $\Sigma$ .



щимся границами, могут соответствовать неединичные операторы и имеет место аналог *второй теоремы де Рама*: представление  $\alpha(l_x)$  всех петель однозначно определяется своими значениями на базисных петлях. Из того, что уже говорилось, ранее, следует, что представление всего группоида  $\alpha(p_x^{x'})$  определяется при этом с точностью до калибровочного преобразования (аналога точной 1-формы).

Подытожим сказанное. Аналогом 1-формы является представление группоида путей  $\alpha(p_x^{x'})$ . Если такое представление задано, то в частности задано и представление петель  $\alpha(l_x)$ . Представление петель, начинающихся в разных точках, эквивалентны. Действительно, между группами петель в разных точках имеется изоморфизм  $l_{x'} \mapsto l'_x$ , где

$$l_{x'} = \hat{p}^{-1}(\hat{p}l_x, \hat{p}^{-1})\hat{p} = \hat{p}^{-1}l'_x\hat{p}, \quad (\hat{p} = p_x^{x'}).$$

Отсюда для представлений петель следует

$$\alpha(l_{x'}) = [\alpha(\hat{p})]^{-1} \alpha(l'_x) \alpha(\hat{p}).$$

Поэтому достаточно рассмотреть представление петель, начинающихся в одной точке, скажем  $x$ . Характеристики этого представления заменяют для неабелевых форм понятия замкнутой и точной формы.

Чтобы их сформулировать, следует в группе всех петель выделить подгруппу петель, являющихся границами, или, иначе, подгруппу петель, стягиваемых в точку,  $(L_0)_x \subset L_x$ . Если представление всех петель тривиально,  $\alpha_0(l_x) = 1$ , то мы имеем дело с аналогом точной формы. В таком случае представление группоида  $\alpha(p_x^{x'})$  описывает калибровочное преобразование (8.3). Если же представление тривиально лишь на подгруппе стягиваемых петель,  $\alpha((l_0)_x) = 1$ , то мы имеем дело с аналогом замкнутой формы. Представление всех петель  $\alpha(l_x)$  определяется в этом случае своими значениями на базисных петлях.

Задание представления петель  $\alpha(l_x)$  определяет представление группоида  $\alpha(p_x^{x'})$  с точностью до калибровочного преобразования (8.4). Если представление петель тривиально для стягиваемых петель  $\alpha((l_0)_x) = 1$ , то представление группоида определяется с точностью до калибровки заданием представления базисных петель. Базисными следует считать такие петли  $l_j$ ,  $j=1, 2, \dots, s$ , что любая петля  $l$  может быть представлена в виде  $l = P \prod_j (l_j)^{n_j} l_0$ ,

где  $l_0$  — стягиваемая петля.

Мы видели на примерах, что в пространствах с нетривиальной топологией действительно возникают представления, тривиальные на стягиваемых петлях, но нетривиальные на всей группе петель. Эти представления описывают специфические калибровочные (в частности, электромагнитные) поля, которые по существу являются глобальными. Напряженность такого поля (форма  $DA$ ) везде равна нулю, а представление группы петель

нетривиально, но сводится к представлению фундаментальной группы. Типичным примером такого поля является поле, описывающее эффект Ааронова—Бома.

Представляется важной формулировка формулы Стокса в терминах представления группоида и введение на этой основе формы  $DA$ , описывающей напряженность поля. Выше было показано, как этого можно достичь. Однако полученная формулировка вызывает неудовлетворение из-за своей громоздкости. В частности, неудовлетворительным является то, что в ней явно присутствует предельная процедура. Тем не менее она важна для понимания существа дела. В следующем параграфе мы покажем, как к этому вопросу можно подойти с иной точки зрения, что открывает одновременно принципиально новые возможности.

### § 9. Теорема Стокса для неабелевых форм любых размерностей

В предыдущем параграфе мы познакомились с тем, как некоторые свойства дифференциальных форм можно перенести на случай неабелевых форм (форм связности или калибровочных полей), пользуясь представлением группоида путей. При этом полученные результаты удовлетворительны в той части, которая касается форм ранга 0 и 1. Однако формулировка той части теоремы Стокса, которая позволяет перейти от линейного интеграла вдоль петли к интегралу по поверхности, натянутой на петлю, оставляет желать лучшего. Ее дефект состоит в том, что мы не имеем независимого определения упорядоченной экспоненты от двумерного интеграла и поэтому вынуждены строить это определение по ходу дела из того материала, который у нас есть: из представления группы петель. В результате обобщение формулы Стокса (8.5) оказывается в сущности тавтологией. Правая часть формулы, расписывающаяся с помощью (8.6), является лишь переписыванием левой части в несколько измененном виде (петля конечных размеров представляется в виде произведения большого количества малых лассо). Двумерный интеграл определен лишь для формы вида  $DA$  (точной 2-формы). Нельзя считать задачу решенной, пока у нас нет независимого определения упорядоченной экспоненты от двумерного интеграла. Такое определение должно быть построено так, чтобы интегрировать можно было любые 2-формы, а не только те, которые возникают как (ковариантный) внешний дифференциал 1-форм.

Очевидная трудность определения двумерного интеграла состоит в проблеме упорядочения. У нас имеется естественный и единственный способ упорядочения линейного интеграла, однако априори неясно, как следует производить упорядочение при интегрировании по двумерной поверхности. Кажется, что способ упорядочения до некоторой степени произволен. Так оно и есть. Однако мы сформулируем процедуру, которая позволяет единым образом рассмотреть различные способы упорядочения и интер-



претиривать их с той точки зрения, которая важна для приложений такого рода интегралов.

Упорядочение интеграла вдоль 1-мерной кривой основывалось в сущности на том, что мы представляли ее как последовательность точек (нульмерных многообразий). Возникает мысль представить поверхность как семейство 1-мерных многообразий — сечений поверхности. Такое семейство может быть упорядочено и позволит нам упорядочить произведение экспонент. При этом придется на первых порах отказаться от привычного представления о том, что по поверхности интегрируется дифференциальная форма, заданная как поле на поверхности (в каждой ее точке). Вместо этого теперь форма должна быть задана функциями от кривых, являющихся сечениями поверхности. Однако мы увидим, что в контексте рассматриваемой задачи это как раз является естественным. А впоследствии покажем, как можно перейти к обычному заданию формы функциями от точек. Разумеется, предлагаемые определения являются произвольными и полезность или бесполезность их будет видна только в приложениях. Мы продемонстрируем (в частности, в следующей главе), что вводимые определения естественны и полезны.

В этом параграфе мы будем рассматривать только группоиды путей с фиксированным началом и концом. Поэтому для упрощения обозначений условимся писать  $p \in P$  вместо  $\hat{p} \in \hat{P}$ .

Пусть  $\mathcal{M}$  — многообразие, а  $P(\mathcal{M})$  — множество кривых в  $\mathcal{M}$ . Элементом  $P(\mathcal{M})$  является кусочно-гладкая кривая  $\{x\} = \{x(\tau) \in \mathcal{M} | 0 \leq \tau \leq 1\}$ . Множество  $P(\mathcal{M})$  можно рассматривать как бесконечномерное многообразие<sup>\*</sup>), координатами в котором являются числа  $x^\mu(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$ . Можно отождествить две кривые, отличающиеся лишь параметризацией,  $\{x(\tau)\} \sim \{x(f(\tau))\}$ . Тогда точками многообразия  $P(\mathcal{M})$  становятся классы кривых, отличающихся параметризацией, а  $x^\mu(\tau)$  и  $x^\mu(f(\tau))$  — лишь разные наборы координат одной и той же точки. Более того, можно считать, что точкой многообразия  $P(\mathcal{M})$  является путь, как он определен в § 1 гл. 6, а для определения дифференцируемой структуры на  $P(\mathcal{M})$  использовать самую гладкую кривую из класса кривых, входящих в один и тот же путь  $p_x'$ . Это та кривая, из которой удалены все аппендиксы (отрезки, проходимые в одном направлении и сразу вслед за этим в обратном направлении). Таким образом,  $P = P(\mathcal{M})$  становится ничем иным, как группоидом путей на многообразии  $\mathcal{M}$ . Однако теперь на этом группоиде введена структура дифференцируемого многообразия.

Теперь можно проделать в многообразии  $P$  все те операции, которые в § 1 гл. 6 мы проделали для пространства  $\mathcal{M}$ , и получить группоид путей в  $P$ . Будем обозначать его  $P(P(\mathcal{M}))$  или просто

<sup>\*</sup>) Теория бесконечномерных многообразий излагается, например, в книге Ленга [29], где показано, как на таких многообразиях можно ввести все структуры, свойственные обычным многообразиям, в том числе дифференциальные формы.

$P^{(2)}$ . Элементами  $P^{(2)}$ , таким образом, являются пути в пространстве путей. Каждый путь в  $P$  определяет в  $M$  некоторую поверхность с заданным на ней линейно упорядоченным семейством кривых, которые в совокупности «заметают» всю эту поверхность. Такому объекту можно присвоить название — *двумерный путь* или *2-путь* в  $M$ . Таким образом, путь в  $P$  — это 2-путь в  $M$ . Другими словами, каждый элемент  $p^{(2)} \in P^{(2)}$  представляет собой путь в многообразии  $P(M)$  или, что то же, 2-путь в  $M$ .

Каждой стягиваемой петле в  $M$  можно сопоставить различные натянутые на эту петлю поверхности. На каждой из таких поверхностей можно по-разному выбрать заметающее ее упорядоченное семейство путей, т. е. каждой поверхности соответствует

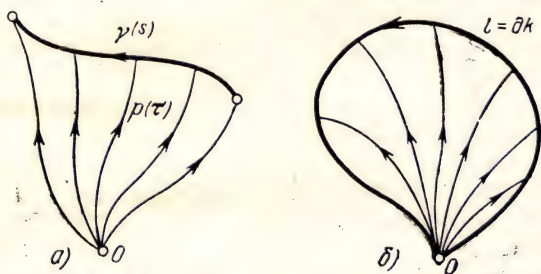


рис. 25.

множество различных 2-путей. Следовательно, введя понятие 2-путь, мы усложнили, детализировали понятие поверхности. Если одной петле соответствует много опирающихся на нее поверхностей, то еще более имеется опирающихся на нее 2-путей.

Такое усложнение, введение вместо поверхности понятия 2-пути (т. е. упорядоченной поверхности) сразу и легко позволяет нам определить неабелев аналог двумерного интеграла. Достаточно лишь построить представление группоида  $P^{(2)}$  путей в  $P$ . Таким образом, *правильным аналогом 2-формы на  $M$  является представление группоида 2-путей  $P^{(2)} = P(P(M))$* . Иными словами, нельзя естественно определить интеграл от неабелевой 2-формы по поверхности. Определяется лишь интеграл (точнее — упорядоченная экспонента от интеграла) по 2-пути. Сейчас мы с помощью этой конструкции заново сформулируем (теперь уже не тавтологично) вторую формулу Стокса в неабелевом варианте. Позднее (в гл. 8) мы убедимся, что эта конструкция оказывается полезной (по-видимому, даже необходимой) в теории калибровочных монополей.

Для конкретных построений и позднее для физических приложений нам понадобится не весь группоид 2-путей  $P^{(2)}$ , а лишь подгруппоид  $S \subset P^{(2)}$ . В него будут входить лишь такие 2-пути, которые состоят из путей, начинающихся в одной и той же точке. 2-путь  $s \in S$  — это «веер» путей (рис. 25, а). Обозначим фикси-



рованную точку, в которой начинаются пути, через  $O \in \mathcal{M}$ . Тогда каждый  $s \in S$  — такое семейство путей  $s = \{p(\tau) \in P | 0 \leq \tau \leq 1\}$ , что каждый путь  $p(\tau)$  начинается в точке  $O$ . Другими словами,  $p(\tau) = \{x(\sigma, \tau) | 0 \leq \sigma \leq 1\}$ ,  $x(0, \tau) = O$ . Конечные точки путей этого семейства прочерчивают некоторый путь  $p = \{x(1, \tau) | 0 \leq \tau \leq 1\}$ . Таким образом, существует естественное отображение  $\gamma: s \rightarrow p$  группоида  $S$  на группоид  $P$ . Нетрудно видеть, что это отображение является гомоморфизмом группоидов, т. е. сохраняет групповые операции. Позднее это отображение будет играть очень существенную роль.

В группоиде  $S$  выделенную роль играет подгруппа  $K$  2-путей, начинающихся и кончающихся постоянным путем  $1_0 \in P$ . Это значит, что 2-путь  $k \in K$  удовлетворяет условию  $x(\sigma, 0) = x(\sigma, 1) = O$  при всех  $\sigma$ . Подгруппу  $K$  будем называть *группой 2-петель* (рис. 25, б). Отображение  $\gamma$  отображает группу 2-петель на группу петель  $L \subset P$ , т. е. представляет собой гомоморфизм групп. Петля  $\gamma(k)$  является границей той поверхности, которая заматается 2-петлей  $k$ . Поэтому ее естественно обозначить  $\partial k$ . Примем это обозначение, т. е. ограничение отображения  $\gamma$  на подгруппу  $K$  будем обозначать  $\gamma|_K = \partial$ . Тем самым введено понятие *обобщенной границы 2-петли*. Пусть  $c \in K$  и  $\partial c = 1$ . Это значит, что 2-петля  $c$  имеет в качестве границы единичный элемент группы петель  $L$ . Такие 2-петли можно назвать *обобщенными 2-циклами*. Они образуют группу  $C \subset K$ . Для доказательства теоремы Стокса эта подгруппа нам не понадобится, но в дальнейшем она будет играть важную роль.

В пространстве  $\mathcal{M}$  форма ранга 1 имеет вид  $A = A_\mu(x) dx^\mu$ , где индекс  $\mu$  нумерует координаты. В многообразии  $P$  координатами являются функции  $x^\mu(\sigma)$ ,  $0 \leq \sigma \leq 1$ , т. е. роль индекса играет пара  $(\mu, \sigma)$ , где  $\mu$  — дискретный параметр, а  $\sigma$  — непрерывный. Поэтому 1-форма в  $P$  имеет вид

$$f(p) = \int_0^1 d\sigma f_\mu(p, \sigma) \cdot dx^\mu(\sigma). \quad (9.1)$$

Пусть  $k = \{p(\tau) | 0 \leq \tau \leq 1\}$  — 2-петля,  $k \in K$ . Параметризуя каждый путь  $p(\tau)$  из этой 2-петли параметром  $\sigma$ , получим  $p(\tau) = \{x(\tau, \sigma) | 0 \leq \sigma \leq 1\}$ . Тогда интеграл от формы  $f$  по 2-петле  $k$  по определению равен

$$\varphi(k) = P \exp \left\{ i \int_k f(p) \right\} = P_\tau \exp \left\{ i \int_0^1 d\tau \int_0^1 d\sigma \frac{\partial x^\mu(\sigma, \tau)}{\partial \tau} \cdot f_\mu(p(\tau), \sigma) \right\}, \quad (9.2)$$

где упорядочение производится по параметру  $\tau$ , а по параметру  $\sigma$  берется обычный, неупорядоченный интеграл, как в (9.1).

В соответствии с таким определением двумерного интеграла вторая формула Стокса должна иметь вид

$$\alpha(l) = \varphi(k), \text{ если } l = \partial k. \quad (9.3)$$

Здесь  $k$  — 2-петля,  $l$  — ее граница (т. е. петля), а представления определяются соответствующими формами:

$$\alpha(l) = P \exp \left\{ i \int_l A \right\}, \quad \varphi(k) = P \exp \left\{ i \int_k f \right\}.$$

Задача сводится к тому, чтобы определить форму  $f$ . Тем самым будет определена операция  $\mathcal{D}$ , сопоставляющая 1-форме  $A$  в  $\mathcal{M}$  некоторую 1-форму  $f = \mathcal{D}A$  в  $P(\mathcal{M})$ . Естественно обозначить  $\varphi = d\alpha$ . Тогда формула Стокса запишется в виде

$$\alpha(\partial k) = (d\alpha)(k), \quad (d\alpha)(k) = P \exp \left\{ i \int_k \mathcal{D}A \right\}. \quad (9.3')$$

Способ определения формы  $\mathcal{D}A$  очевиден. Петлю  $l$  следует представить в виде произведения большого числа петель, каждая из которых имеет конечную длину, но очень малую ширину. Такая факторизация определит семейство путей  $k$ , т. е. 2-петлю с границей  $l = \partial k$ . Эту факторизацию можно определить разными способами, и в случае теоремы Стокса все эти способы дают один и тот же результат.

Возьмем самую гладкую из кривых, входящих в класс  $l$  (кривую с ампутированными аппендиксами). Пусть это будет кривая  $\{x(\tau) | 0 \leq \tau \leq 1\}$ ,  $x(0) = x(1) = O$ . Пусть  $p(\tau)$  — путь, ведущий из точки  $O$  в точку  $x(\tau)$ , причем семейство путей  $p(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$ , является гладким. Тогда семейство путей  $k = \{p(\tau), 0 \leq \tau \leq 1\}$  представляет собой 2-петлю с границей  $\partial k = l$ . Она и будет фигурировать в теореме Стокса.

Разобьем отрезок  $[0, 1]$  на  $N$  равных частей длины  $\Delta\tau = 1/N$  точками  $\tau_j = j/N$ . Тогда определится конечное множество путей  $p_j = p(\tau_j)$ . Образует с их помощью узкие длинные петли  $\delta\lambda_j = p_j^{-1} \delta l_j p_{j-1}$ , где  $\delta l_j$  — часть петли  $l$  между точками  $x_{j-1} = x(\tau_{j-1})$  и  $x_j = x(\tau_j)$  (рис. 26).

Петля  $l$  представляется в виде произведения

$$l = \delta\lambda_N \delta\lambda_{N-1} \dots \delta\lambda_1.$$

Пользуясь свойством представления группы петель, запишем:

$$\alpha(l) = \alpha(\delta\lambda_N) \alpha(\delta\lambda_{N-1}) \dots \alpha(\delta\lambda_1). \quad (9.4)$$

В пределе  $N \rightarrow \infty$  петли  $\delta\lambda_j$  становятся бесконечно узкими. Они и позволят нам в дальнейшем определить форму  $\mathcal{D}A$ .

Если из каждого пути  $p(\tau)$  выделить наиболее гладкую кривую  $\{x(\sigma, \tau) | 0 \leq \sigma \leq 1\}$ , то параметры  $\sigma, \tau$  параметризуют некоторую поверхность, натянутую на петлю  $l$ . Петле  $\delta\lambda_j$  соответствует часть этой поверхности  $\delta\Sigma_j$ . Факторизуем петлю  $\delta\lambda_j$ , представив ее в форме произведения лассо, каждое из которых



полностью лежит на поверхности  $\delta \Sigma_j$ . Такую факторизацию можно производить по-разному. Два способа факторизации представлены на рис. 27. Как мы видим, полосу  $\delta \Sigma_j$  можно проходить от начала к концу или, наоборот, от конца к началу. Возможны и всевозможные промежуточные способы прохождения. Окончательный результат (т. е. выражение для формы  $\mathcal{D}A$ ) не зависит от этого. Это связано с тем, что в конечном счете нас интересует предел  $\Delta \tau \rightarrow 0$ .

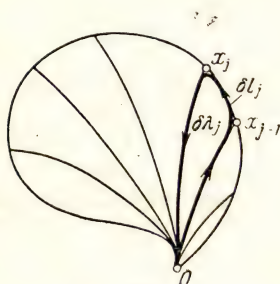


Рис. 26.

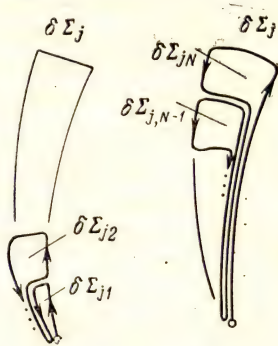


Рис. 27.

При любом способе факторизации петли  $\delta \lambda_j$  полоса  $\delta \Sigma_j$  разбивается на площадки  $\delta \Sigma_{jm}$ , шириной равные ширине полосы. В гл. 6, § 10 (см. также § 8 настоящей главы) было показано \*), что при такой факторизации для  $\alpha(\delta \lambda_j)$  получается выражение (с точностью до членов 2-го порядка по длине и ширине клетки  $\delta \Sigma_{jm}$ )

$$\alpha(\delta \lambda_j) \approx P \prod_m \exp \left\{ i \int_{\delta \Sigma_{jm}} \mathcal{F}(p_{jm}) \right\}, \quad (9.5)$$

где  $p_{jm}$  — путь, лежащий в полосе  $\delta \Sigma_j$  и ведущий из точки  $O$  в некоторую точку клетки  $\delta \Sigma_{jm}$ , а форма  $\mathcal{F}(p)$  определяется следующим образом:

$$\mathcal{F}(p) = [\alpha(p)]^{-1} F(pO) \alpha(p),$$

$$F = DA = dA - iA \wedge A = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (9.6)$$

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} - i[A_\mu, A_\nu].$$

Ширина клетки  $\delta \Sigma_{jm}$  определяется интервалом  $[\tau_{j-1}, \tau_j]$  параметра  $\tau$ . Длину ее определим аналогичным образом, т. е.

\*) Доказательство, приведенное там, годится не только для пространства Минковского или аффинного пространства, но и для любого многообразия, если только петля может быть стянута в точку,

с помощью интервала  $[\sigma_{m-1}, \sigma_m]$  параметра  $\sigma$ , выбирая  $\sigma_m = m/N$ . В пределе  $N \rightarrow \infty$  будет уменьшаться как ширина, так и длина клетки. При этом выражение (9.5) для  $\alpha(\delta\lambda_j)$  будет становиться все более точным. Чтобы с помощью формулы (9.4) при переходе к пределу  $N \rightarrow \infty$  получить правильное выражение для  $\alpha(l)$ , необходимо, чтобы формула (9.5) была справедлива с точностью до  $1/N$ . Члены порядка  $1/N^2$  не вносят вклада в предел  $N \rightarrow \infty$  выражения (9.4). Легко показать, что формула (9.5) остается справедливой с точностью до членов порядка  $1/N$  даже в том случае, если в ней упорядоченное произведение по  $m$  заменить суммированием соответствующих показателей экспонент. В результате получаем другое приближенное выражение, которое остается справедливым с точностью до  $1/N$ :

$$\alpha(\delta\lambda_j) = \exp \left( i \int_{\delta\Sigma_j} \mathcal{F} \right) + O(1/N^2).$$

Отсюда уже один шаг до нужного нам результата. Действительно, узкую петлю  $\delta\Sigma_j$  можно рассматривать как интервал между двумя путями  $[p_{j-1}, p_j]$ , и интеграл по ней — как интеграл от формы в пространстве путей  $P(\mathcal{M})$ . Это дает

$$\alpha(\delta\lambda_j) = \exp \left( i \int_{[p_{j-1}, p_j]} f(p) \right) + O(1/N^2). \quad (9.7)$$

Для формы  $f(p)$  получаем выражение

$$f(p) = \int_0^1 d\sigma \mathcal{F}_{\mu\nu}(p_\sigma) \dot{x}^\mu(\sigma) \cdot \dot{x}^\nu(\sigma), \quad (9.8)$$

где  $p_\sigma$  — путь, составляющий часть пути  $p = \{x(\sigma') | 0 \leq \sigma' \leq 1\}$ , определяемую кривой  $\{x(\sigma') | 0 \leq \sigma' \leq \sigma\}$ . Величина  $\dot{x}^\mu(\sigma) d\sigma$  здесь представляет собой приращение координаты вдоль пути  $p$  и используется для того, чтобы выразить форму  $f(p)$  в виде интеграла вдоль пути  $p$ . А дифференциал  $\dot{x}^\nu(\sigma)$  описывает приращение координат пути при переходе от одного пути к другому. Если имеется семейство путей  $p(\tau)$ , параметризованных параметром  $\tau$ , то координаты каждого пути суть  $x^\nu(\sigma, \tau)$ ,  $0 \leq \sigma \leq 1$ , и мы имеем

$$\dot{x}^\nu(\sigma, \tau) = \frac{\partial x^\nu(\sigma, \tau)}{\partial \tau} d\tau.$$

Подставляя в произведение (9.4) выражение (9.7), мы получим окончательно теорему Стокса в виде (9.3). При этом для интеграла по 2-петле имеем теперь выражение

$$\varphi(k) = P_\tau \exp \left\{ i \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{F}_{\mu\nu}(p_\sigma(\tau)) \frac{\partial x^\mu(\sigma, \tau)}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu(\sigma, \tau)}{\partial \tau} d\sigma d\tau \right\}. \quad (9.9)$$



В нем фигурирует неабелева путезависимая форма  $\mathcal{F}_{\mu\nu}(p)$ , которая определяется формулами (9.6) через напряженность калибровочного поля (см. гл. 6, § 10). Через эту форму представление 2-петель  $\varphi(k)$  выражается в сравнительно симметричном виде (9.9). Асимметрия этого выражения состоит в том, что упорядочение производится лишь по одному из двух параметров,  $\tau$ . Если выразить  $\varphi(k)$  через 1-форму в пространстве  $P$ , т. е. в виде (9.2), то для этой 1-формы получаем выражение (9.8). Следовательно, при подстановке (9.6) формула (9.8) представляет собой выражение для  $f = \mathcal{D}A$ . Это неабелева 2-форма, которая получается дифференцированием неабелевой 1-формы. Другими словами, это неабелева точная 2-форма.

Выражение типа (9.9) позволяет определить 2-мерный интеграл не только от формы  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ , выражающейся через вектор-потенциал в виде ковариантной производной, но и от произвольной 2-формы. Пусть дана 2-форма  $\mathcal{H}_{\mu\nu}(p)$ , зависящая от путей достаточно гладко. Достаточно, чтобы для любого малого лассо  $l$  разность  $\mathcal{H}(pl) - \mathcal{H}(p)$  была пропорциональна площади, охватываемой петлей этого лассо. Это условие обеспечивается, например, если форма  $\mathcal{H}(p)$  удовлетворяет структурному условию, содержащему некоторое представление петель,  $\alpha(L)$ :

$$\mathcal{H}_{\mu\nu}(pl) = \alpha(l^{-1}) \mathcal{H}_{\mu\nu}(p) \alpha(l).$$

Такую форму будем называть ковариантной. В частном случае это может быть путезависимая форма, которая выражается через обычную (локальную) форму  $H_{\mu\nu}(x)$  в виде

$$\mathcal{H}_{\mu\nu}(p) = [\alpha(p)]^{-1} H_{\mu\nu}(pO) \alpha(p),$$

где  $\alpha(p)$  — представление группоида путей.

По этой форме для любого 2-пути  $s \in S$  определим интеграл

$$\chi(s) = P_\tau \exp \left\{ i \int_0^1 d\tau \int_0^1 d\sigma \mathcal{H}_{\mu\nu}(p_\sigma(\tau)) \frac{\partial x^\mu(\sigma, \tau)}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu(\sigma, \tau)}{\partial \tau} \right\}. \quad (9.10)$$

Обозначения здесь такие же, как и выше. Это значит, что

$$\begin{aligned} s &= \{p(\tau) \in P \mid 0 \leq \tau \leq 1\}, \\ p(\tau) &= \{x(\sigma, \tau) \in \mathcal{M} \mid 0 \leq \sigma \leq 1\}, \quad x(0, \tau) = O, \\ p_\sigma(\tau) &= \{x(\sigma', \tau) \mid 0 \leq \sigma' \leq \sigma\}. \end{aligned}$$

Разница состоит лишь в том, что теперь мы определяем интеграл по произвольному 2-пути  $s \in S$ , а не по 2-петле, поэтому  $p(0)$ ,  $p(1)$  произвольны (а не равны  $1_0$ ).

Отображение  $s \mapsto \chi(s)$  является представлением группоида  $S$ , т. е. для любых  $s, s' \in S$  имеет место соотношение

$$\chi(s') \chi(s) = \chi(s's). \quad (9.11)$$

Для доказательства его достаточно лишь показать, что  $\chi(s)=1$ , если 2-путь  $s$  получается прохождением некоторого семейства путей  $p(\tau)$  в одном направлении, а затем в противоположном. Это в свою очередь следует из того, что упорядочение в (9.10) производится лишь по параметру  $\tau$ , но не по  $\sigma$ . Одновременно этим доказываемся, что выражение  $\chi(s)$  зависит лишь от 2-пути, т. е. от целого класса семейств  $\{p(\tau) | 0 \leq \tau \leq 1\}$ , но не от конкретного выбора семейства из этого класса.

Групповое свойство функции  $\chi$ , т. е. соотношение (9.11), играет совершенно ту же роль, что и свойство аддитивности для обычного интеграла. При ограничении функции  $\chi$  на подгруппу  $K \subset S$  2-петель получается, очевидно, представление этой подгруппы.

Таким образом, интеграл от неабелевой 2-формы определен независимо от какого бы то ни было линейного интеграла. Поэтому теорема Стокса (9.3) перестает быть тавтологией. Ее содержание состоит в том, что линейный интеграл  $\alpha(l)$  по любой петле  $l \in L$  равен двумерному интегралу от некоторой 2-формы по 2-петле  $k \in K$ , натянутой на эту петлю,  $\partial k = l$ . Фигурирующая в этой теореме 2-форма определяется формулами (9.6).

Резюмируем определения и результаты этого параграфа. Вместо 2-мерной поверхности было введено понятие 2-пути  $p^{(2)} \in P^{(2)}$ . 2-путь в  $\mathcal{M}$  — это не что иное, как путь в пространстве путей в  $\mathcal{M}$ . Это можно записать так:  $P^{(2)} = P(P(\mathcal{M}))$ .

Для формулировки обобщенной теоремы Стокса достаточно рассмотреть подпространство  $S \subset P^{(2)}$  2-путей типа «веер», связанных к одной точке  $O \in \mathcal{M}$ . Как  $P^{(2)}$ , так и  $S$ , представляют собой группоиды. Более того, для теоремы Стокса достаточно рассмотреть лишь группу 2-петель  $K \subset S$ .

Интегрирование по поверхности в теории неабелевых форм не может быть определено корректно. Вместо этого следует определить интегрирование вдоль 2-пути. Для этого рассматривается такая операторнозначная функция  $p^{(2)} \mapsto \varphi(p^{(2)})$  на  $P^{(2)}$ , которая определяет некоторое представление группоида 2-путей. Это представление является аналогом 1-формы в  $P$  или 2-формы в  $\mathcal{M}$ . Для каждого представления  $\alpha(p)$  группоида путей имеется такое представление  $\varphi = d\alpha$  группы 2-петель  $K$ , что выполняется формула Стокса (9.3), (9.3'). Если представление  $\alpha$  группоида  $P$  определяется 1-формой  $A$ , то представление  $d\alpha$  группы  $K$  определяется 2-формой  $F = DA$  по формулам (9.6), (9.9).

Ясно, что теперь мы можем повышать размерность форм неограниченно. Действительно, тот факт, что исходное многообразие  $\mathcal{M}$  предполагалось конечномерным, является несущественным. Беря вместо  $\mathcal{M}$  бесконечномерное многообразие путей  $P(\mathcal{M})$ , мы тем же способом можем перейти от 1-форм на  $P(\mathcal{M})$  к 1-формам на  $P(P(\mathcal{M}))$  или, иначе говоря, от 2-форм на  $\mathcal{M}$  к 3-формам на  $\mathcal{M}$ . Таким образом, формулу (9.3') можно понимать как обобщение теоремы Стокса на неабелевы формы любых размерностей.



## § 10\*. Обобщенные гомологии и когомологии

На основе результатов, полученных в предыдущих параграфах, можно попытаться построить для представлений группоидов путей (неабелевых форм высшей размерности) классификацию типа когомологий. Обобщение получается переходом к группоидам более высокой размерности. Их можно определить по индукции, положив  $P^{(1)} = P(\mathcal{M})$  и  $P^{(n)} = P(P^{(n-1)})$  при  $n > 1$ . Через  $P(Q)$  мы обозначаем группоид путей на многообразии  $Q$ . Рассмотрим некоторые подходы к классификации представлений таких группоидов.

Напомним, что в § 8 было выяснено следующее: 1) аналогом 1-формы на  $\mathcal{M}$  является представление  $\alpha(P)$  группоида путей в  $\mathcal{M}$ ; 2) аналогом точной 1-формы является представление, тривиальное на всех петлях,  $\alpha(I) = 1$ ; 3) аналогом замкнутой 1-формы является представление группоида, тривиальное на всех петлях, стягиваемых в точку; при этом представление определяется своими значениями на базисных петлях, т. е. сводится к представлению фундаментальной группы  $\pi_1(\mathcal{M})$ .

Как обобщить эту классификацию на случай группоида  $P^{(n)}$ ? Очевидная возможность — рассмотреть поведение представлений  $\alpha(P^{(n)})$  на подгруппе петель  $L^{(n)} = L(P^{(n-1)})$ , где через  $L(Q)$  обозначена группа петель на многообразии  $Q$ , начинающихся в заданной точке (эту точку следовало бы ввести в обозначение группы, но мы для простоты опускаем ее). Аналогом точной формы можно считать представление, тривиальное на  $L^{(n)}$ . Аналогом замкнутой формы — представление, тривиальное на тех петлях из  $L^{(n)}$ , которые стягиваются в точку. Такое представление сводится к представлению группы  $\pi_1(P^{(n-1)})$ .

Однако классификация такого типа, хотя, вероятно, и полезная, не является единственно возможной. Чтобы описать другой подход к классификации представлений, рассмотрим группу, определенную по индукции,  $L_0^{(n)} = L(L_0^{(n-1)})$ ,  $L_0^{(1)} = L(\mathcal{M})$ . Если представление  $\alpha(P^{(n)})$  является тривиальным на всех элементах  $l_0^{(n)} \in L_0^{(n)}$ , его можно считать аналогом точной формы. Если оно тривиально лишь на петлях из  $L_0^{(n)}$ , которые стягиваются в точку, то оно является аналогом замкнутой формы. В этом случае представление сводится к представлению группы  $\pi_1(L_0^{(n-1)})$ . В связи с этим важно, что гомотопические группы пространства петель совпадают [30] с гомотопическими группами более высокой размерности многообразия, на котором рассматриваются пути,  $\pi_n(L(Q)) = \pi_{n+1}(Q)$ . Поэтому имеем  $\pi_1(L_0^{(n-1)}) = \pi_n(\mathcal{M})$ . Следовательно, такого рода классификация представлений основывается на гомотопических группах исходного многообразия.

Рассмотрим более подробно еще один вариант классификации и заодно покажем, как можно перейти от группоидов к группам многомерных путей. Будем рассматривать группу путей  $P = P(G)$  на произвольной (топологической) группе  $G$ . В этом случае группа путей определяется совершенно аналогично тому, как

это было сделано в гл. 6, § 2 для аффинного пространства. Отличие состоит лишь в том, что операция сдвига аффинного пространства заменяется операцией правого сдвига на группе. Это значит, что на множестве (непрерывных) кривых в  $G$  производится отождествление кривых, отличающихся общим сдвигом,  $\{g(\tau)\} \sim \{g(\tau)g_1\}$ . Кроме того, отождествляются кривые, отличающиеся параметризацией, а также добавлением или ампутацией «аппендиксов». Получающееся множество классов кривых образует группу  $P = P(G)$  — группу путей на группе. Аффинное (точнее — центроаффинное) пространство также можно рассматривать как группу по сложению. Преимущество такого определения состоит в том, что оно позволяет определить группы (а не группоиды) путей высших размерностей.

Определим группы путей высших размерностей, полагая  $P^{(1)} = P(G)$  и  $P^{(n)} = P(P^{(n-1)})$  при  $n = 2, 3, \dots$ . Элемент  $p^{(n)} \in P^{(n)}$  будем называть « $n$ -путь». Он задается семейством  $(n-1)$ -путей:

$$p^{(n)} = \{p^{(n-1)}(\tau) | 0 \leq \tau \leq 1\},$$

разумеется, с учетом необходимых отождествлений. Обозначим

$$\Delta p^{(n)} = p^{(n-1)}(1)[p^{(n-1)}(0)]^{-1} \in P^{(n-1)}.$$

Будем называть эту величину *сдвигом*, соответствующим данному  $n$ -пути. Отображение  $\Delta: P^{(n)} \rightarrow P^{(n-1)}$  является гомоморфизмом.

Обозначим через  $L(Q)$  группу петель на группе  $Q$ , т. е.  $L(Q) = \{l \in P(Q) | \Delta l = 1\}$ . Группу  $n$ -петель определим как  $L^{(n)} = L(P^{(n-1)})$ . Нам понадобится еще более узкая группа, которую можно определить по индукции,  $L_0^{(n)} = L(L_0^{(n-1)})$ ,  $L_0^{(0)} = G$ . Каждый элемент этой группы есть петля петель петель и т. д. Наконец, назовем группой  $n$ -контуров группу  $K^{(n)} = L(P(L_0^{(n-2)}))$ , полагая  $K^{(1)} = L(G)$ .

На группе  $n$ -контуров можно определить операцию границы. Положим  $\partial k^{(1)} = 1$  для любого  $k^{(1)} \in K^{(1)}$ , а для более высоких размерностей положим

$$\partial k^{(n)} = \{\Delta p^{(n-1)}(\tau) | 0 \leq \tau \leq 1\}, \text{ если } k^{(n)} = \{p^{(n-1)}(\tau) | 0 \leq \tau \leq 1\}.$$

Отображение  $\partial: K^{(n)} \rightarrow L_0^{(n-1)}$  является гомоморфизмом. Нетрудно видеть, что любой элемент группы  $L_0^{(n)}$  переводится этим отображением в единицу. Отсюда и из определения группы  $K^{(n)}$  следует, что  $\partial \partial k^{(n)} = 1$  для любого  $k^{(n)} \in K^{(n)}$ , т. е. граница границы тривиальна.

Операция  $\partial$  позволяет обычным образом определить группу (обобщенных) циклов и группу (обобщенных) границ

$$C^{(n)} = \{c^{(n)} \in K^{(n)} | \partial c^{(n)} = 1\}, \quad B^{(n)} = \partial K^{(n+1)}.$$

Ясно, что  $L_0^{(n)} \subset C^{(n)}$ , так что имеем  $B^{(n)} \subset L_0^{(n)} \subset C^{(n)} \subset K^{(n)}$ . Можно показать, что подгруппа  $C^{(n)}$  инвариантна в  $K^{(n)}$ , а  $B^{(n)}$  инвариантна в  $C^{(n)}$ . Фактор-группу  $H_{(n)} = C^{(n)}/B^{(n)}$  можно назвать



обобщенной группой гомологий. Таким образом получается классификация  $n$ -контуров, приспособленная для приложений в теории неабелевых форм. Например, сформулированное в § 5 определение калибровочного монополя опирается на понятие петли петель, т. е. 2-цикла. Отметим, что предложенную классификацию можно обобщить и на случай, когда вместо группы  $G$  имеется произвольное многообразие  $\mathcal{M}$ . Но для этого вместо групп  $n$ -путей придется пользоваться группоидами  $n$ -путей.

В случае достаточно высоких размерностей (больших  $n$ ) все определенные семейства  $n$ -путей,  $P^{(n)}$ ,  $L^{(n)}$ ,  $L_0^{(n)}$ ,  $K^{(n)}$ , отличаются друг от друга. Но для низших размерностей они частично совпадают. Так, для нулевой размерности можно положить  $P^{(0)} = L^{(0)} = L_0^{(0)} = K^{(0)} = G$ , для размерности единица  $P^{(1)} = P(G)$  и  $L^{(1)} = L_0^{(1)} = K^{(1)} = L(G)$ , а для размерности два  $P^{(2)} = P(P(G))$ ,  $K^{(2)} = L^{(2)} = L(P(G))$ ,  $L_0^{(2)} = L(L(G))$ . Учитывая отождествления, которые мы условились делать, можно считать, что семейство  $P^{(2)}$  содержит 2-пути типа «вее» (см. рис. 25, а), а семейство  $K^{(2)} = L^{(2)}$  — 2-петли (см. рис. 25, б). Наконец, семейство  $L_0^{(2)}$  содержит петли петель, которые использовались в § 5 для описания поля калибровочного монополя (см. рис. 23). В следующей главе для построения теории пробного калибровочного монополя (и вообще нелокальных частиц — струн) будет использоваться группа  $K^{(2)} = L^{(2)}$ .

В соответствии с полученной классификацией  $n$ -контуров можно построить и классификацию их представлений. Представление  $\chi(K^{(n)})$  группы  $K^{(n)}$  является неабелевым аналогом дифференциальной формы. Если это представление тривиально на подгруппе  $C^{(n)} \subset K^{(n)}$ , то оно является аналогом точной формы. Если оно тривиально лишь на  $B^{(n)}$ , то оно является аналогом замкнутой формы. Представления такого типа сводятся к представлениям группы  $H^{(n)}$ . Их значения на группе  $C^{(n)}$  определяются значениями на базисных обобщенных  $n$ -циклах. Значения же таких представлений на всей группе  $K^{(n)}$  определяются этим «с точностью до калибровки», т. е. с точностью до представления, являющегося аналогом точной формы. Среди представлений такого типа можно выделить набор базисных представлений (нетривиальных лишь на одном из базисных обобщенных  $n$ -циклов). Остальные представления выражаются через них. Таким способом можно классифицировать все представления этого класса по некоторой группе  $H^{(n)}(G, U)$ , зависящей от группы  $U$ , в которой принимают значения рассматриваемые представления. Группа  $H^{(n)}(G, U)$  обобщает группу когомологий.

Мы не будем детально разрабатывать здесь эту теорию и давать более точные определения. Однако в следующей главе будет показано, что обобщенные замкнутые 2-формы образуют класс, выделенный с точки зрения физики. А именно, калибровочный монополь ведет себя как обычная локальная частица в таком калибровочном поле  $F_{\mu\nu}(x)$ , что дуальная форма  $F_{\mu\nu}^*(x)$  является обобщенной замкнутой в описанном только что смысле.

## КИНЕМАТИКА ПРОБНЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ МОНОПОЛЕЙ

В последних параграфах главы 7 были доказаны утверждения, представляющие собой обобщение теорем Стокса и де Рама на случай неабелевых дифференциальных форм. В этой главе мы применим полученные результаты для описания квантовых частиц особого рода, которые можно назвать пробными магнитными монополями и их калибровочными аналогами.

Идея состоит в следующем. В главе 6 было показано, что внутренние степени свободы калибровочно заряженной частицы описываются представлением группы петель, которое может быть задано либо одномерным интегралом от вектор-потенциала, либо двумерным интегралом от напряженности поля. Последнее подталкивает мысль определить новое представление группы петель, перейдя в двумерном интеграле от тензора напряженности к дуальному тензору, в котором электрическое и магнитное поля меняются ролями. Новое представление должно тогда описывать внутренние степени свободы калибровочного монополя, т. е. калибровочного аналога магнитного заряда. Таким образом можно попытаться построить теорию пробных калибровочных монополей (пробных в том смысле, что их собственное поле не учитывается при рассмотрении).

Мы увидим, что в случае абелева калибровочного поля не возникает никаких сложностей при реализации этой программы, так что можно построить обычную локальную теорию пробных магнитных зарядов, движущихся во внешнем электромагнитном поле. Однако для неабелева поля возникают трудности, приводящие к тому, что пробный калибровочный магнитный заряд оказывается существенно нелокальным объектом (существенно зависит от пути).

В этой связи возникает два вопроса: 1) как математически описать свойства такого нелокального объекта; 2) как физически интерпретировать их. Мы увидим, что описание нелокальных свойств можно получить на основе развитой в предыдущей главе теории неабелевых дифференциальных форм и, в частности, на основе неабелевой теоремы Стокса. С другой стороны, будет высказана гипотеза, что калибровочные магнитные заряды (или калибровочные дионы — частицы, обладающие как магнитным, так и электрическим зарядами) могут служить моделью кварков. При этом нелокальные свойства таких частиц объясняют (по крайней мере качественно) удержание кварков.

### §11. Пробный магнитный заряд (монополь)

В главе 6 было показано, что локальные свойства частиц (их внутренние степени свободы) можно описать с помощью представления группы петель  $\alpha(L)$ , а состояния частиц с такими свой-



ствами описываются индуцированным представлением группы путей,  $\alpha(L) \uparrow P$ . Подробно было проанализировано представление  $\alpha(L)$ , порождаемое некоторой (вообще говоря, неабелевой) 1-формой  $A = A_\mu(x) dx^\mu$ . Возникает, однако, вопрос — не существует ли представлений группы петель, которые не сводятся к представлениям рассмотренного класса.

На этот вопрос следует, по-видимому, ответить отрицательно\*). Тем не менее мы рассмотрим сейчас представление, которое задается некоторой 2-формой  $H = \frac{1}{2} H_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu$  и определяется, грубо говоря, интегралом от этой формы по поверхности, натянутой на петлю  $l \in L$ . Мы покажем, что таким способом можно определить представление  $\beta(L)$ , с помощью которого удастся описать пробный магнитный заряд, движущийся в электромагнитном поле, и его калибровочный аналог. Позднее это утверждение будет уточнено.

Начнем с абелева поля, т. е. предположим, что  $H_{\mu\nu}(x)$  — обычные числовые функции, так что  $H$  — абелева форма. Существенно различаются два случая: 1) когда  $H$  — замкнутая форма, т. е.  $dH=0$ ; 2) когда  $H$  не является замкнутой. Второй случай не намного проще, чем случай, когда форма неабелева. Так же, как и неабелева форма, незамкнутая абелева форма приводит к описанию частиц, существенно зависящих от пути, нелокальных. Мы рассмотрим такого рода модели позднее. Сейчас же остановимся на рассмотрении первого случая, предположив, что  $dH=0$ .

Предположение  $dH=0$  следует физически обосновать, и это требует обсуждения конкретной модели. Одно из очевидных применений развиваемого сейчас подхода — это описание магнитного заряда в электромагнитном поле. Действительно, как мы видели, электрический заряд в электромагнитном поле описывается представлением  $\alpha(L) \uparrow P$ , где представление  $\alpha(L)$  порождается вектор-потенциалом  $A$ . Однако в силу теоремы Стокса (гл. 7, § 6)

$$\int_{\partial \Sigma} A = \int_{\Sigma} dA,$$

где форма  $F=dA$  описывает напряженность электромагнитного поля. Если записать эту форму в виде  $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu$ , то согласно правилам дифференцирования форм (гл. 7, § 6) имеем

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}.$$

---

\*) По крайней мере, если представление является достаточно гладким, оно выражается через вектор-потенциал.

Таким образом, представление  $\alpha(L)$  группы петель, определенное, как обычно, вектор-потенциалом, вместо этого можно выразить через напряженность поля:

$$\alpha(l) = \exp \left\{ ie \int_{\Sigma} F \right\}, \text{ если } l_0 = \partial \Sigma.$$

В экспоненте стоит интеграл по площадке, натянутой на петлю. Он представляет собой поток поля через эту площадку и не зависит от выбора площадки, а лишь от петли.

Такое выражение для представления  $\alpha(L)$ , описывающего электрический заряд, подсказывает, как следует описывать *магнитный заряд*. Для магнитного заряда магнитное поле играет ту же роль, что электрическое поле для электрического заряда, и наоборот: электрическое поле для магнитного заряда играет ту же роль, что магнитное поле для электрического. Следовательно, для перехода к описанию магнитного заряда можно поменять местами напряженности электрического и магнитного полей. А это достигается, как известно, переходом от тензора напряженности к дуальному тензору.

Таким образом, для описания магнитного заряда следует вместо тензора напряженности  $F_{\mu\nu}$  рассмотреть *дуальный тензор*

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\rho} \tilde{F}^{\lambda\rho}, \\ \tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} F_{\sigma\rho}. \end{aligned}$$

Здесь  $[\eta_{\mu\nu}] = \text{Diag}(1, -1, -1, -1)$  — тензор Минковского, а  $\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}$  — так называемый *дискриминантный тензор* (или *тензор Леви-Чивита*). Беря за основу тензор  $F^*_{\mu\nu}$ , определим *дуальную форму*  $F^* = \frac{1}{2} F^*_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$  и дуальное представление группы петель

$$\beta(l) = \exp \left\{ ig \int_{\Sigma} F^* \right\}, \text{ если } l_0 = \partial \Sigma.$$

Нетрудно доказать, что это действительно представление группы петель, по крайней мере в односвязном пространстве. Для этого достаточно заметить, что *уравнение Максвелла* (без источников) через дифференциальную форму  $F^*$  записывается в виде

$$dF^* = 0.$$

Используя определение внешнего дифференциала и расписывая уравнение через компоненты тензора  $F^*_{\mu\nu}$ , а затем переходя к тензору  $F_{\mu\nu}$ , нетрудно привести это уравнение к более привычной форме уравнения Максвелла

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = 0.$$

Таким образом, в силу уравнения Максвелла форма  $F^*$  является *замкнутой* (в области, где отсутствуют электрические заряды, т. е. правая часть уравнения Максвелла равна нулю).



Но по теореме де Рама в любой односвязной области (где каждая петля стягивается в точку) замкнутая форма является точной. Это значит, что существует такая 1-форма  $B = B_\mu(x) dx^\mu$ , что  $F^* = dB$ . Поэтому, пользуясь теоремой Стокса, можно поверхностный интеграл от формы  $F^*$  преобразовать в линейный интеграл от формы  $B$ . В результате получаем

$$\beta(l) = \exp \left\{ ig \int_{l_0} B \right\},$$

откуда следует, что  $\beta$  действительно является представлением группы петель.

Если имеются электрические заряды (источники уравнения Максвелла), то точки, в которых расположены эти заряды, следует выбросить и рассматривать по-прежнему область, свободную от зарядов. Однако получившееся таким образом многообразие уже не обязательно является односвязным, и замкнутая форма  $F^*$  в ней не обязательно является точной. В таком случае следует специально позаботиться о том, чтобы интеграл  $\int_\Sigma F^*$  имел одно

и то же значение для любой поверхности, натянутой на одну и ту же петлю. Только при этом условии определенное этим интегралом число  $\beta(l)$  действительно будет зависеть только от петли. Условие однозначности, которое таким образом возникает, подробно было рассмотрено в гл. 7, § 5, только применительно к электрическому заряду, движущемуся в поле магнитного заряда — источника. Теперь ситуация обратная, однако математически картина получается в точности такой же. Условие однозначности приводит по-прежнему к условию квантования Дирака \*)  $eg = 1/2n$ . Если это условие выполнено, то даже при наличии источников функция  $\beta(l)$  определяет представление группы петель.

Построив таким образом представление группы петель  $\beta(L)$ , мы можем индуцировать его на группу всех путей. Индуцированное представление  $U(P) = \beta(L) \uparrow P$  описывает локальные (кинематические) свойства *пробного магнитного заряда*, движущегося в электромагнитном поле  $A_\mu(x)$ . Число  $g$  есть величина этого заряда. Магнитный заряд рассматривается в этом случае как квантовая частица. Он является пробным в том смысле, что его собственное поле не учитывается. Мы не будем описывать представление  $\beta(L) \uparrow P$ , потому что оно ничем в сущности не отличается от рассмотренного подробно представления  $\alpha(L) \uparrow P$ , соответствующего электрическому заряду. Все результаты, получен-

\*) Следовательно, условие квантования величин магнитных и электрических зарядов является условием совместности. Оно гарантирует, что электрические заряды могут двигаться в поле магнитных зарядов, а магнитные заряды — в поле электрических. В то же время из него следует, что и те, и другие (когда рассматриваются как классические) должны быть точечными.

ные для представления  $\alpha \uparrow P$ , автоматически переносятся на представление  $\beta \uparrow P$  при замене вектор-потенциала  $eA_\mu(x)$  на «дуальный» вектор-потенциал  $gB_\mu(x)$ . Полный дуализм между электрическим и магнитным зарядами в терминах путезависимого формализма Мандельштама был прослежен впервые в работе Каббиво и Феррари [131].

Таким образом, квантовая теория пробного магнитного заряда (или дираковского монополя) строится без особого труда. Мы проследили лишь кинематику этой теории (локальные свойства монополя). Однако ясно, что динамика формулируется в полной аналогии с динамикой электрического заряда, с помощью ковариантных производных. Только ковариантная производная для магнитного заряда должна строиться с помощью вектор-потенциала  $B_\mu(x)$ :

$$\tilde{\nabla}_\mu = \partial_\mu - igB_\mu(x).$$

Теперь мы перейдем к рассмотрению неабелевой калибровочной теории и попытаемся в ней ввести понятие пробного калибровочного монополя. Мы увидим, что в этом случае возникают принципиальные трудности. Их можно преодолеть, но тогда оказывается, что калибровочный монополь обладает совершенно новыми свойствами — он является нелокальным объектом.

## § 2. Представление группы петель, определяемое неабелевой 2-формой

Мы видели в предыдущем параграфе, что замкнутая абелева 2-форма определяет представление группы петель, и на этой основе можно построить теорию пробных магнитных монополей полностью аналогичную теории электрических зарядов. Теперь рассмотрим возможность таких построений в неабелевой теории. Целью нашей будет построить теорию частиц, локальные (кинематические) свойства которых описываются тензором  $F_{\mu\nu}^*(x)$ , дуальным по отношению к тензору напряженности калибровочного поля  $F_{\mu\nu}(x)$ . Этот тензор определяет неабелеву 2-форму  $F^* = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^*(x) dx^\mu \wedge dx^\nu$ , которая в силу уравнения Янга—Миллса обладает свойством, аналогичным свойству замкнутости. Однако в силу специфики неабелевой теории это не приводит автоматически к тому, что эта форма порождается соответствующим вектор-потенциалом  $B_\mu(x)$  (или 1-формой  $B = B_\mu dx^\mu$ ). В этом и состоит трудность построения теории калибровочных монополей. И по этой причине наличие уравнения Янга — Миллса (аналогичного уравнению Максвелла) не так уж существенно. Поэтому мы начнем с рассмотрения произвольной 2-формы и попытаемся с ее помощью построить представление петель.



Пусть задана произвольная (вообще говоря, неабелева) 2-форма  $H = \frac{1}{2} H_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu$ . Мы видели в гл. 7, § 9, что такая форма определяет интеграл по 2-петлям. Используем это для того, чтобы построить по ней представление группы петель.

В гл. 7, § 9 была определена группа 2-петель  $K$ . Каждая 2-петля представляет собой семейство путей,  $k = \{p(\tau) \mid 0 \leq \tau \leq 1\}$ , начинающихся \*) в точке  $O \in M$ , причем первый и последний пути в этом семействе совпадают с постоянным путем  $1 = \{x(\sigma) \equiv O\}$ . Концы путей очерчивают некоторую петлю  $l \in L$ , а все семейство путей заметает некоторую поверхность, опирающуюся на эту петлю. Петля  $l$  называется *границей 2-петли*,  $l = \partial k$ . Если параметризовать каждый путь, входящий в семейство  $k$ , так, что  $p(\tau) = \{x(\sigma, \tau) \mid 0 \leq \sigma \leq 1\}$ , то функция  $x(\sigma, \tau)$  представляет собой параметризацию поверхности, натянутой на петлю  $l$ .

Если задана 2-форма  $H_{\mu\nu}(x)$ , то она однозначно определяет интеграл по 2-петле  $k$  (точнее — упорядоченную экспоненту от такого интеграла). Сначала нужно перейти к путезависимой форме. Для этого требуется некоторый вектор-потенциал  $A_\mu(x)$  или, что то же, некоторое представление  $\alpha(P)$  группоида путей. По этому представлению *путезависимая форма* определяется формулой

$$\mathcal{H}_{\mu\nu}(p) = [\alpha(p)]^{-1} H_{\mu\nu}(pO) \alpha(p).$$

С ее помощью строится оператор

$$\chi(k) = P_\tau \exp \left\{ i \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{H}_{\mu\nu}(p_\sigma(\tau)) \frac{\partial x^\mu(\sigma, \tau)}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu(\sigma, \tau)}{\partial \tau} d\sigma d\tau \right\}, \quad (2.1)$$

где через  $p_\sigma(\tau)$  обозначен усеченный путь  $p(\tau)$ , определяемый как  $p_\sigma(\tau) = \{x(\sigma', \tau) \mid 0 \leq \sigma' \leq \sigma\}$ . Упорядочение производится лишь по одному из параметров, а именно по тому, который упорядочивает пути, входящие в 2-петлю.

Как доказано в гл. 7, § 9, функция  $\chi(k)$  определяет представление группы 2-петель, т. е. выполняется соотношение

$$\chi(k'k) = \chi(k')\chi(k).$$

Это соотношение является аналогом свойства аддитивности, справедливого для обычных интегралов. Теперь достаточно соответствующим образом каждой петле сопоставить 2-петлю, чтобы получить представление группы петель. Это сопоставление  $\kappa: l \mapsto k$  должно сохранять групповые свойства, т. е. должно выполняться соотношение

$$\kappa(l'l) = \kappa(l')\kappa(l).$$

\*) При рассмотрении монополя нам будут нужны почти исключительно пути, начинающиеся в фиксированной точке  $O$ . Мы будем обозначать их буквой  $p$  без шляпки.

Тогда, полагая

$$\chi_x(l) = \chi(x(l)),$$

мы получим представление  $\chi_x(L)$  группы петель.

Для того чтобы определить отображение  $\chi$ , нам потребуется одна вспомогательная конструкция. Сопоставим каждой точке пространства Минковского  $x \in M$  некоторый путь, ведущий в эту точку из начала отсчета  $O$  (разумеется, вместо  $O$  можно было бы выбрать любую другую точку). Обозначим этот путь через  $x_P$ , так что  $x_P \in P$  и  $x_P O = x$ . До сих пор мы иногда использовали символ  $x_P$  для обозначения любого пути, ведущего в точку  $x$ . Сейчас нам требуется для каждой точки выбрать и зафиксировать только один путь — ее *представитель*. Можно сказать, что мы рассматриваем множество путей  $P$  как расслоение над  $M$  и выбираем сечение этого расслоения. Разумеется, мы будем предполагать, что сечение является гладким, т. е. путь  $x_P$  гладко меняется при изменении точки  $x$ . Что такое гладкое сечение существует, следует хотя бы из того, что в качестве представителей можно выбрать прямолинейные пути. Обозначим сечение через  $\rho$ , так что  $\rho: x \mapsto x_P$ .

Теперь отображение  $\chi: L \rightarrow S$  определяется следующим образом. Пусть  $l = \{x(\tau) \mid 0 \leq \tau \leq 1\}$ . Тогда каждой точке на этой петле  $x(\tau)$  можно сопоставить путь  $p(x(\tau)) = (x(\tau))_P = \rho(x(\tau))$ . Тем самым определяется 2-петля  $k = \{p(\tau)\} = \{(x(\tau))_P\}$ , причем очевидно, что  $\partial k = l_0$ , т. е. это семейство путей опирается на выбранную нами петлю. Определенную так 2-петлю мы и обозначим  $k = \chi(l)$ . Как она устроена, видно из рис. 28. Если петля  $l_0$  проходится в обратном направлении (т. е. проходится петля  $l_0^{-1}$ ), то ей сопоставляется то же самое семейство путей, но упорядоченное противоположным образом. Это приводит к тому, что  $\chi(l^{-1}l) = \chi(l^{-1}) \chi(l) = 1$ . Точно так же доказывается и более общее свойство, что отображение  $\chi$  сохраняет групповое умножение.

Таким образом, построение представления петель  $\chi_x(L)$  закончено. Суть этого построения состоит в том, что каждой петле  $l$  мы определенным образом сопоставили 2-петлю  $k = \chi(l)$  и определили  $\chi_x(l)$  как интеграл по этой 2-петле. Поскольку произведению петель соответствует произведение 2-петель, то свойство мультипликативности упорядоченных двумерных интегралов обеспечивает то, что  $\chi_x(L)$  является представлением.

Мы видим, что, как и в абелевом случае, *неабелева 2-форма позволяет определить представление группы петель*. Однако при этом возникает *дополнительный произвол*. Он состоит в выборе вектор-потенциала  $A_\mu(x)$  (или, что то же, представления  $\alpha(P)$



Рис. 28.



группоида путей) и в выборе пути  $x_P$ , ведущего в каждую точку  $x \in \mathcal{M}$  (или, что то же, в выборе сечения  $\rho$  в расслоении путей). Оба эти элемента произвола сохраняются, если в качестве 2-формы  $H$  выбрать форму, дуальную по отношению к напряженности калибровочного поля,  $H_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^*$ . Поэтому при построении теории калибровочных монополей возникают специфические трудности.

### § 3. Локальный калибровочный монополь в условиях нарушения калибровочной инвариантности

В предыдущем параграфе мы показали, что задание неабелевой 2-формы  $H = H_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu$  определяет представление группы петель. Однако при этом имеется произвол, состоящий в выборе некоторого вектор-потенциала  $A_\mu(x)$  (для перехода к путезависимой форме) и некоторого пути  $x_P$ , ведущего в каждую точку пространства-времени из начала отсчета  $O$ . Посмотрим теперь, как можно на этой основе построить теорию калибровочного монополя. Разумеется, мы сейчас можем обсуждать лишь локальные (кинематические) характеристики монополя.

Пусть задано калибровочное поле, т. е. представление группы петель  $\alpha(L)$ . Отметим, что вектор-потенциал  $A_\mu(x)$  или представление группоида  $\alpha(P)$  определяются по нему не однозначно, а лишь с точностью до калибровочного произвола. Зато однозначно определяется напряженность калибровочного поля  $F_{\mu\nu}$  или 2-форма  $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ . Построим по ней дуальную форму  $F^* = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^* dx^\mu \wedge dx^\nu$ , где  $F_{\mu\nu}^* = \varepsilon_{\mu\nu\tau\rho} F^{\tau\rho}$ , и на основании этой формы попытаемся описать локальные свойства некоторой частицы, которая будет названа *пробным калибровочным монополем*.

2-форма  $F^*$  позволяет построить некоторое представление группы петель  $\beta(L)$  и, индуцируя на группу всех путей,  $U(P) = \beta(L) \uparrow P$ , мы можем получить описание частицы обычным образом, как это делалось для обычных калибровочно заряженных частиц. При этом, однако, возникает вопрос, каков смысл произвола, который возникает при определении  $\beta(L)$ . Существует две принципиальных возможности: 1) интерпретировать этот произвол физически или 2) изменить всю схему описания частицы, вообще отказавшись от представления  $\beta(L)$  (поскольку оно произвольно) и индуцированного представления  $U(P)$ . В первом случае монополю будет иметь обычные локальные свойства, но только при фиксации произвола. Во втором случае монополю по своим свойствам будет совсем не похож на калибровочно заряженные частицы. Мы проанализируем оба варианта. Разумеется, есть и третий вариант — сделать вывод, что такой частицы, как калибровочный монополю, не может существовать в природе. Однако этот вывод кажется маловероятным.

Если мы хотим описать монополю во внешнем калибровочном поле, то само это поле  $\alpha(L)$  следует считать заданным. Вместе

с ним задана и напряженность поля. Однако локальная форма напряженности  $F_{\mu\nu}(x)$  задана с точностью до калибровочного преобразования (см. гл. 6, § 10), и лишь ее путезависимая форма

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(p) = [\alpha(p_0)]^{-1} F_{\mu\nu}(p_0) \alpha(p_0)$$

определяется однозначно. Более того, напряженность определяется из теоремы Стокса именно в путезависимой форме, т. е. знание  $\alpha(L)$  дает знание  $\mathcal{F}_{\mu\nu}(p)$ . Поэтому дуальную форму также правильно определять сразу в путезависимой форме:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^*(p) = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{F}^{\rho\sigma}(p).$$

Тогда она автоматически удовлетворяет структурному условию:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^*(pl) = \alpha(l^{-1}) \mathcal{F}_{\mu\nu}^*(p) \alpha(l).$$

Таким образом, один элемент произвола в определении  $\beta(L)$  оказался фиктивным и был связан лишь с тем, что в качестве исходной использовалась локальная, т. е. неадекватная для данной теории, форма напряженности.

Второй элемент произвола состоит в выборе отображения  $\rho: x \mapsto x_\rho$ , сопоставляющего каждой точке путь, ведущий в эту точку (отображение  $\rho$  есть сечение расслоения путей). Этот произвол является реальным, и если мы хотим построить локальную теорию монополя, то выбор  $\rho$  следует мотивировать физически. Чтобы прояснить смысл этого выбора, вернемся к теории обычных калибровочно заряженных частиц (мы будем называть их электрически заряженными в отличие от монополей). Эти частицы описываются индуцированным представлением  $\alpha(L) \uparrow P$ , и состояния их представляются функциями на группе,  $\Psi(p)$ . Переход к локальным волновым функциям можно осуществить, продолжив каким-то образом функцию  $\alpha$  с подгруппы  $L$  на группу  $P$  так, чтобы выполнялось  $\alpha(pl) = \alpha(p) \alpha(l)$ . С помощью такой функции локальная волновая функция определяется как  $\psi(p) = \alpha(p) \Psi(p)$ . Однако если в нашем распоряжении есть сечение  $\rho$ , можно поступить и иначе. Можно попросту положить  $\psi(x) = \Psi(x_\rho)$ . Конечно, это эквивалентно определенному выбору функции  $\alpha(p)$ , а именно, выбору  $\alpha(x_\rho l) = \alpha(l)$ . И обратно, если имеется некоторая функция  $\alpha(p)$ , то можно найти соответствующее сечение  $\rho$ , находя  $x_\rho$  из условия  $\alpha(x_\rho) = 1$ .

Следовательно, даже при описании обычных частиц в калибровочном поле возникает произвол в выборе сечения  $\rho$ . Однако там он становится необходимым лишь в том случае, если мы хотим от путезависимых волновых функций  $\psi(p)$  перейти к локальным функциям  $\psi(x)$ . При этом выбор  $\rho$  означает попросту *фиксацию калибровки* при описании таких частиц. Изменение калибровки означает изменение  $\rho$ .

Принципиальное отличие калибровочных монополей от калибровочных электрических зарядов состоит в том, что необхо-



димось выбора  $\rho$ , т. е. фиксации калибровки, возникает на более раннем этапе — при определении представления  $\beta(L)$ . Для электрических калибровочных зарядов имеется принципиальная возможность работать с путезависимыми волновыми функциями. Тогда калибровку фиксировать не нужно. Фиксация калибровки происходит лишь при переходе к локальным функциям. Для монополей ситуация иная. Если мы хотим описывать монополи некоторым представлением вида  $U(P) = \beta(L) \uparrow P$ , то мы с самого начала вынуждены фиксировать калибровку.

Предположим, что мы зафиксировали калибровку или, иначе, выбрали сечение  $\rho: x \mapsto x_\rho$ . Тогда по схеме, описанной в предыдущем параграфе, мы получаем возможность построить некоторое представление группы петель, соответствующее 2-форме  $\mathcal{F}^*$ . Сформулируем результат этого построения. Положим \*)

$$\hat{F}_{\mu\nu}^{(\rho)}(x) = \mathcal{F}_{\mu\nu}^*(x_\rho).$$

Для заданной петли  $l$  выберем гладкую функцию  $x_{(\rho)}(\sigma, \tau)$  так, чтобы 1)  $x_{(\rho)}(0, \tau) = O$ ; 2) кривая  $\{x_{(\rho)}(1, \tau) | 0 \leq \tau \leq 1\}$  совпадала с петлей  $l_0$ ; 3) при фиксированных  $\sigma, \tau$  кривая  $\{x_{(\rho)}(\sigma', \tau) | 0 \leq \sigma' \leq \sigma\}$  совпадала с путем  $(x_{(\rho)}(\sigma, \tau))_\rho$ . Тогда формула

$$\beta_{(\rho)}(l) = P_\tau \exp \left\{ i \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(\rho)}(x(\sigma, \tau)) \frac{\partial x^\mu(\sigma, \tau)}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu(\sigma, \tau)}{\partial \tau} d\sigma d\tau \right\}$$

определяет представление группы петель  $\beta_{(\rho)}(L)$ .

Получив представление группы петель, мы индуцируем его на группу всех путей,  $U_{(\rho)}(P) = \beta_{(\rho)}(L) \uparrow P$  и получаем пространство состояний монополя  $\mathcal{H}_{(\rho)}$ , реализованное путезависимыми функциями  $\Psi_{(\rho)}(p)$ . Переход к локальным функциям теперь уже должен производиться при помощи сечения  $\rho$ . Другими словами, следует положить  $\phi_{(\rho)}(x) = \Psi_{(\rho)}(x_\rho)$ . Действие представления  $U_{(\rho)}$  на эти функции можно записать в виде

$$(U_{(\rho)}(p) \phi_{(\rho)})(x) = \beta_{(\rho)}(x_\rho^{-1} p (p^{-1} x)_\rho) \phi_{(\rho)}(p^{-1} x).$$

**З а м е ч а н и е.** Если представление  $\alpha(L)$  и, следовательно, форма  $\mathcal{F}_{\mu\nu}^*$  коммутативны, то построенное представление  $\beta_{(\rho)}(L)$  не зависит от  $\rho$  в силу уравнения Максвелла (см. предыдущий параграф). Однако для неабелевых форм зависимость от  $\rho$  сохраняется даже при выполнении уравнения Янга — Миллса (о нем будет сказано в следующем параграфе).

Подытожим результаты. Описание пробного калибровочного монополя (т. е. частицы, связанной с дуальной напряженностью  $F_{\mu\nu}^*(x)$ ) как обычной локальной частицы возможно, но оно с не-

\*) Это по сути дела та же локальная 2-форма, которая обсуждалась в начале параграфа и была отброшена как содержащая лишний произвол. Теперь мы опять к ней возвращаемся, потому что этот произвол зафиксировали. По сути дела мы принимаем, что произвол в выборе вектор-потенциала  $A_\mu(x)$  и произвол в выборе сечения  $\rho$  — это один и тот же произвол, что оба выбора должны делаться согласованно.

обходимостью требует фиксации калибровки. Не существует калибровочно инвариантного описания такого монополя. При переходе к другой калибровке представление  $U_{(P)}(P)$  переходит в представление  $U_{(P')} (P)$ , которое ему, вообще говоря, не эквивалентно. Можно сказать, что разным калибровкам соответствуют разные локальные монополи.

Какие физические выводы можно из этого сделать? По-видимому, если калибровочный монополи существует как локальная частица, то это приводит к нарушению калибровочной инвариантности. И наоборот: *существование локального калибровочного монополя возможно лишь в таких условиях, когда калибровочная инвариантность нарушена*. В квантовой теории калибровочного поля рассматриваются такие состояния, в которых *калибровочная инвариантность (спонтанно) нарушается*. Поэтому в принципе нет ничего невозможного в том, что в определенных условиях калибровочный монополи может наблюдаться как локальная частица. Однако можно наверняка сказать, что это невозможно в условиях, когда калибровочная инвариантность не нарушена. Разумеется, мы обсуждаем этот вопрос лишь с самой общей точки зрения, поэтому можно сделать лишь такие общие выводы. Более конкретные выводы возможны лишь при гораздо более детальном исследовании, которое выходит за рамки данной работы.

Теперь мы рассмотрим вопрос о том, нельзя ли сохранить калибровочную инвариантность и все же ввести описание калибровочного монополя, отказавшись от привычной схемы описания его индуцированным представлением  $\beta(L) \uparrow P$ .

#### § 4. Нелокальный калибровочный монополи и дион

Мы видели в предыдущем параграфе, что построение теории калибровочного монополя в рамках обычной схемы, основанной на индуцировании из группы петель,  $\beta(L) \uparrow P$ , невозможно, если не нарушать калибровочной инвариантности. Попытаемся теперь построить калибровочно инвариантную теорию, хотя при этом наверняка придется отказаться от обычной схемы.

Посмотрим прежде всего, что имеется в нашем распоряжении, если не выбирать калибровки  $\rho$ . Мы имеем представление группы петель  $\alpha(L)$ , описывающее калибровочное поле. Оно однозначно определяет зависящую от пути 2-форму  $\mathcal{F}_{\mu\nu}(p)$ , а по ней мы можем построить дуальную форму  $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}_{\mu\nu}^*(p) dx^\mu \wedge dx^\nu$ , удовлетворяющую структурному условию. Такая форма позволяет однозначно построить представление группоида 2-путей  $S$  (см. гл. 7, § 9). Более того, можно построить такое представление, исходя из произвольной линейной комбинации форм  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{F}^*$ . Частица, которая будет описываться таким представлением, обладает как электрическим, так и магнитным калибровочными зарядами. Такую частицу можно назвать *калибровочным дионом*.



Мы будем рассматривать сразу этот общий случай. Поэтому начнем с некоторых уточнений.

При описании диона возникает две числовые константы  $e$  и  $g$ , которые характеризуют линейную комбинацию форм  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{F}^*$ . До сих пор рассматривались ситуации, в которых могла фигурировать лишь одна константа, и ее можно было вообще исключить, изменив вектор-потенциал  $A_\mu(x)$ . Теперь мы вынуждены выписывать эту константу явно. Поэтому будем определять представление группы петель  $\alpha(L)$  формулой

$$\alpha(l) = P \exp \left\{ ie \int_l A \right\} = P \exp \left\{ ie \int_k \mathcal{F} \right\}.$$

Первая экспонента здесь представляет собой линейный интеграл от формы  $A = A_\mu dx^\mu$  по петле, а вторая — двумерный интеграл от формы  $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$  по 2-петле  $k$  такой, что  $\partial k = l$ .

Эта форма описывает напряженность калибровочного поля и в соответствии с теоремой Стокса (гл. 7, § 9) выражается в виде ковариантного дифференциала от формы  $A$ . С учетом константы  $e$  определение ковариантного дифференциала следует несколько изменить. Теперь оно будет выглядеть так:

$$F = DA = dA - ieA \wedge A, \\ F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} - ie[A_\mu, A_\nu].$$

Численная константа  $e$  в этих формулах отнюдь не является зарядом электрона или вообще каким-либо электрическим зарядом и обозначена так лишь с целью подчеркнуть аналогию ее с электрическим зарядом. На самом деле это константа связи калибровочно заряженных частиц (или дионов) с калибровочным полем, т. е. с глюонами (кванты калибровочного поля в теории сильных взаимодействий называются глюонами).

Калибровочно (электрически) заряженная частица описывается представлением  $\alpha(L)$ . Для описания калибровочного диона необходимо представление  $\chi(K)$  группы 2-петель. Для его определения введем форму  $H = \frac{1}{2} H_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu$ , выразив ее как линейную комбинацию

$$H_{\mu\nu} = eF_{\mu\nu} + gF_{\mu\nu}^*.$$

Ковариантная форма  $\mathcal{H} = \frac{1}{2} \mathcal{H}_{\mu\nu}(p) dx^\mu \wedge dx^\nu$  получается с помощью функции  $\alpha(p)$ , являющейся продолжением функции  $\alpha(l)$  на групповый путь:

$$\mathcal{H}_{\mu\nu}(p) = [\alpha(p)]^{-1} H_{\mu\nu}(pO) \alpha(p).$$

Она удовлетворяет условию ковариантности (структурному)

$$\mathcal{H}_{\mu\nu}(pl) = \alpha(l^{-1}) \mathcal{H}_{\mu\nu}(p) \alpha(l).$$

Как показано в гл. 7, § 9, такая форма позволяет определить представление группоида 2-путей  $S$  по формуле

$$\chi(s) = P_\tau \exp \left\{ i \int_0^1 d\tau \int_0^1 d\sigma \mathcal{H}_{\mu\nu}(p_\sigma(\tau)) \frac{\partial x^\mu(\sigma, \tau)}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu(\sigma, \tau)}{\partial \tau} \right\}. \quad (4.1)$$

Здесь  $s = \{p(\tau) | 0 \leq \tau \leq 1\}$  — 2-путь;  $x(\sigma, \tau)$  — его параметризация,  $p(\tau) = \{x(\sigma, \tau) | 0 \leq \sigma \leq 1\}$ ;  $p_\sigma(\tau)$  — усеченный путь, т. е.  $p_\sigma(\tau) = \{x(\sigma', \tau) | 0 \leq \sigma' \leq \sigma\}$ . Все фигурирующие здесь пути начинаются в начале отсчета, т. е.  $x(0, \tau) = O$ . Для дальнейшего чрезвычайно существенно, что  $\chi$  обладает свойством представления

$$\chi(s's) = \chi(s')\chi(s). \quad (4.2)$$

При сужении с группоида  $S$  на подгруппу 2-петель  $K \subset S$  получается представление этой подгруппы,  $k \mapsto \chi(k)$ .

В предыдущем параграфе мы использовали представление  $\chi(k)$ , для того чтобы определить представление петель  $\beta(l)$ . Этого удалось достичь, сопоставив каждой петле единственную 2-петлю  $k$ , опирающуюся на эту петлю,  $l = \partial k$ . Однако эта процедура выбора единственной 2-петли оказалась нековариантной, т. е. она становится возможной лишь при фиксации калибровки. Теперь мы откажемся от этого намерения и будем пользоваться представлением  $\chi(k)$ , не пытаясь строить представление петель. Другими словами, мы отказываемся от того, чтобы фиксировать произвол в выборе  $\beta(l)$ . Вместо этого представление  $\chi(k)$  позволяет нам описать этот произвол на языке групп.

Действительно, пусть  $k$  и  $k'$  — две 2-петли, опирающихся на одну и ту же петлю,  $\partial k = \partial k' = l_0$ . С помощью каждой из этих 2-петель мы могли бы сопоставить петле  $l$  некоторый оператор, но получили бы два разных оператора  $\beta(l) = \chi(k)$ ;  $\beta'(l) = \chi(k')$ . Различие между этими операторами в силу группового свойства  $\chi$  равно

$$\beta'(l) [\beta(l)]^{-1} = \chi(k' \cdot k^{-1}).$$

В качестве аргумента справа стоит 2-петля  $c = k'k^{-1}$ . Вспоминая определение границы 2-петли, мы видим, что  $\partial c = ll^{-1} = 1$ , т. е.  $c$  — обобщенный 2-цикл (в смысле гл. 7, § 9, 10). Обобщенные 2-циклы образуют подгруппу  $C \subset K$ . Представление группы  $\chi(K)$  порождает представление ее подгруппы  $\chi(C)$ . И именно это представление характеризует произвол в выборе представления  $\beta(l)$ . Если представление группы  $C$  тривиально,  $\chi(c) = 1$ ,  $\forall c \in C$ , то представление  $\beta(l)$  определяется единственным образом, и калибровочный дион является обычной локальной частицей, которая описывается представлением  $\beta(l) \uparrow P$ .

Рассмотрим случай, когда представление  $\chi(K)$  не является тривиальным на подгруппе  $C$ , и попытаемся построить теорию калибровочного диона в этом случае.



Вспомним, как строилась теория обычной локальной частицы. В нашем распоряжении тогда было представление  $\alpha(L)$  группы петель. Индуцируя его на группу всех путей, мы получали описание частицы волновой функцией, зависящей от путей  $\Psi(p)$ . Наконец, выбирая определенную калибровку, мы получали возможность перейти к волновой функции, зависящей от точек, в которые ведут эти пути,  $\phi(x)$ . Теперь в качестве исходного пункта для построения теории мы имеем представление  $\chi(K)$  группы 2-петель. Естественно возникает мысль, что *теорию диона следует строить по аналогии с теорией обычной частицы, но в пространстве  $P$  вместо пространства Минковского  $M$* . Это значит, что при помощи индуцирования мы получим функцию от 2-путей,  $\Psi(s)$ , а выбирая определенную «2-калибровку», получим функцию от путей, которыми кончаются (в которые ведут) 2-пути,  $\phi(p)$ . Таким образом, калибровочно инвариантная теория калибровочного диона не может быть локальной. Максимум, на что можно надеяться, — это что *дион описывается функциями, зависящими от пути*.

Напомним, что через  $S$  мы обозначаем *группоид 2-путей*  $s = \{p(\tau) | 0 \leq \tau \leq 1\}$ , начинающихся в точке  $O$ , через  $K \subset S$  — *подгруппу 2-петель*, таких, что  $p(0) = p(1) = 1$ . *Границей 2-петли*  $\partial k$  называется петля, которую прочерчивают концы путей  $p(\tau)$ , а  $C \subset K$  — *подгруппа обобщенных 2-циклов*, т. е. таких 2-петель  $c \in K$ , что  $dc = 1$ . Формулу (4.1) можно применить не только к 2-петле  $k \in K$ , но и к любому 2-пути  $s \in S$ . При этом она определяет функцию  $\chi$  на всем группоиде  $S$ , причем отображение  $s \mapsto \chi(s)$  является представлением этого группоида. Нам понадобится эта функция не только на группе  $K$ , но и на более широком множестве 2-путей  $S_1 \subset S$ , таких, что  $p(0) = 1$ . Нетрудно понять, что для любых  $s_1 \in S_1$ ,  $k \in K$  выполняется

$$\chi(s_1 k) = \chi(s_1) \chi(k).$$

Теперь мы будем строить теорию калибровочного диона по аналогии с теорией обычной частицы, но исходя из представления  $\chi(K)$  группы 2-петель. Предположим, что это представление описывает внутренние степени свободы диона и будем строить пространство состояний его как пространство-носитель индуцированного представления  $U(S) = \chi(K) \uparrow S$ . При этом, правда, мы сталкиваемся с новой операцией — *индуцированием на группоид\**). Однако совершенно очевидно, как следует определить эту операцию. Пространство-носитель индуцированного представления определим как пространство функций  $\Psi: S_1 \rightarrow L$ , удовлетворяющих структурному условию

$$\Psi(s_1 k) = \chi(k^{-1}) \Psi(s_1),$$

\*) Впрочем, группоид 2-путей  $S$  можно превратить в группу, факторизуя его по отношению эквивалентности  $s \sim s'$ , где  $s = \{p(\tau)\}$ ,  $s' = \{p(\tau) p_1\}$  при некотором  $p_1 \in P$ . Тогда теорию дионов можно строить с помощью индуцированного представления группы 2-путей  $S/\sim$ . Здесь мы не будем рассматривать эту возможность.

а действие представления  $U(s)$  определим как левый сдвиг таких функций:

$$(U(s)\Psi)(s_1) = \Psi(s^{-1}s_1). \quad (4.3)$$

В этом пункте *сказывается отличие группоида от группы*. Дело в том, что не всякие два элемента группоида можно перемножать, поэтому правая часть этой формулы определена не всегда. Чтобы обойти эту трудность, сузим еще пространство-носитель представления. Обозначим через  $S_1^p$  подмножество группоида  $S$ , которое содержит лишь 2-пути  $s_1^p$ , начинающиеся в точке  $1 \in P$  и кончающиеся в точке  $p \in P$ . Это значит  $s_1^p = \{p(\tau) | 0 \leq \tau \leq 1\}$ , где  $p(0)=1$ ,  $p(\tau)=p$ . Обозначим через  $\Psi_p$  функцию, сосредоточенную на  $S_1^p$ , т. е. такую, что  $\Psi_p(s)=0$  всякий раз, когда  $s \notin S_1^p$ . Таким образом, функция  $\Psi_p$  сосредоточена на подмножестве 2-путей, ведущих в  $p$ . Все функции такого типа (подчиненные, сверх того, структурному условию) образуют линейное пространство  $\mathcal{H}_p$ . Пространство-носитель представления  $U$  определим как объединение (но не сумму) этих пространств,  $\mathcal{H} = \bigcup_{p \in P} \mathcal{H}_p$ . Это значит, что *векторы из подпространств  $\mathcal{H}_p$ ,  $\mathcal{H}_{p'}$ , нельзя складывать, если  $p' \neq p$* , их сумма уже не принадлежала бы пространству  $\mathcal{H}$ . Само пространство  $\mathcal{H}$  в этом случае уже не является линейным. (Говорят, что в  $\mathcal{H}$  имеется *суперотбор*.)

Теперь действие представления  $U$  в пространстве  $\mathcal{H}$  можно определить формулой (4.3). Однако, разумеется, действие оператора  $U(s)$  этим определено не для любых  $s$  и  $\Psi$ . Оно хорошо определено в том случае, если произведение  $s^{-1}s_1$  имеет смысл для любых  $s_1$ , принадлежащих носителю функции  $\Psi$ . Это можно выразить явно, уточнив формулу (4.3) следующим образом:

$$(U(s)\Psi_p)(s_1) = \Psi_p(s^{-1}s_1) \quad \text{при } s \in S^p. \quad (4.3')$$

Здесь  $S^p$  — множество 2-путей, которые кончаются в точке  $p \in P$  (а начинаются где угодно). Нетрудно видеть, что

$$U(s)\mathcal{H}_p \subset \mathcal{H}_{s^{-1}p} \quad \text{при } s \in S^p,$$

т. е. представление  $U(S)$  *импримитивно* с базой импримитивности  $P$ . Наблюдаемая, описываемая этой импримитивностью, — это путь. В этом и состоит нелокальность калибровочного диона.

**З а м е ч а н и е.** Мы видим, что индуцированное представление группоида отличается от индуцированного представления группы в одном отношении. Это отличие состоит в том, что подпространства состояний, соответствующих определенным значениям наблюдаемой (в данном случае  $\mathcal{H}_p$ ,  $p \in P$ ), некогерентны, т. е. векторы из двух различных подпространств нельзя складывать. Правда, при описании динамики эти векторы приходится суммировать. Это указывает на неадекватность описания с помощью группоида. Правильнее перейти к группе 2-путей (см. подстрочное примечание на стр. 224 и § 10 гл. 7).



С помощью вспомогательной функции  $\chi(s)$  можно перейти к функции  $\psi(s) = \chi(s)\Psi(s)$ , которая обладает свойством  $\psi(sk) = \psi(s)$ , т. е. постоянна на правых смежных классах  $sK$ . Следовательно, эту функцию можно рассматривать как функцию на классах, т. е. на элементах пространства  $P = S_1/K$ . Это пространство — не что иное, как группа путей. Следовательно, можно считать, что функция  $\psi$  зависит от пути  $p \in P$ . Более явно,

$$\psi(p) = \chi(p_s)\Psi(p_s),$$

где  $p_s \in S_1$  — 2-путь, ведущий из  $1 \in P$  в  $p \in P$ .

На функции  $\psi(p)$  представление  $U(S)$  действует как

$$(U(s)\psi)(p) = \chi(s(s^{-1}p)_s)[\chi(s^{-1}p)_s]^{-1}\psi(s^{-1}p).$$

Пользуясь определением функции  $\chi(s)$ , можно переписать это следующим образом:

$$(U(s)\psi)(p) = \chi(s)\psi(s^{-1}p), \quad (4.4)$$

где  $s \in S^2$ , т. е. 2-путь, который начинается в  $s^{-1}p$  и кончается в  $p$ .

### § 5\*. Дальнейший анализ нелокальных свойств диона

В предыдущем параграфе построено представление  $U(S) = \chi(K) \uparrow S$  группоида 2-путей  $S$ , описывающее локальные свойства калибровочного диона. Может возникнуть впечатление, что описание частицы на основе группоида  $S$  не имеет никакого отношения к описанию частиц при помощи группы путей  $P$ . Это, однако, не так. Связь между  $S$  и  $P$  осуществляется отображением  $\gamma: S \rightarrow P$ , введенным в гл. 7, § 9. Это отображение каждому 2-пути  $s = \{p(\tau)\}$  сопоставляет путь, очерчиваемый концами путей  $p(\tau)$ . Отображение  $\gamma$  является гомоморфизмом группоида  $S$  на группоид путей или на группу путей. В частности, ограничение  $\gamma$  на подгруппу  $K \subset S$  дает гомоморфизм  $\gamma|_K = \partial$  этой группы на группу петель  $L$ . Сейчас мы используем гомоморфизм  $\gamma$  для того, чтобы показать, как из представления  $U(S)$  получаются те представления группы  $P$ , которые были описаны раньше в связи с обсуждением локальных монополей.

Предположим, что функция  $\Psi(s)$ , являющаяся вектором пространства  $\mathcal{H}$ , т. е. описывающая состояние диона, зависит только от  $\gamma(s)$ . Это значит, что  $\Psi(s) = \tilde{\Psi}(\gamma(s))$ . Это возможно лишь в том случае, если такой вид функции  $\Psi$  не противоречит структурному условию, т. е. если

$$\tilde{\Psi}(\gamma(s_1k)) = \chi(k^{-1})\tilde{\Psi}(\gamma(s_1)).$$

Пользуясь тем, что  $\gamma$  — гомоморфизм, мы можем записать это в виде

$$\tilde{\Psi}(p(\partial k)) = \chi(k^{-1})\tilde{\Psi}(p).$$

Левая часть здесь зависит только от  $l = \partial k$ , следовательно, правая тоже должна зависеть лишь от  $l$ . Это значит, что представление

$\chi(K)$  должно выражаться через некоторое представление  $\beta(L)$  группы петель:

$$\chi(k) = \beta(\partial k).$$

Это имеет место, если представление  $\chi(K)$  тривиально на подгруппе обобщенных 2-циклов:

$$\chi(c) = 1 \text{ при } c \in C \subset K. \quad (5.1)$$

Если это условие выполнено, то структурное условие для функции  $\Psi(s)$  автоматически обеспечивается при выполнении следующего структурного условия для функции  $\tilde{\Psi}$ :

$$\tilde{\Psi}(pl) = \beta(l^{-1}) \tilde{\Psi}(p).$$

Если это условие выполнено, то функция  $\Psi(s) = \tilde{\Psi}(\gamma(s))$  удовлетворяет структурному условию и, следовательно, пространство  $\mathcal{H}$  (носитель индуцированного представления  $U(S)$ ) есть подпространство  $\tilde{\mathcal{H}}$  функций с такой структурой. Закон преобразования таких функций под действием представления  $U(S)$  находится по формуле (4.3). Это дает

$$(U(s)\Psi)(s_1) = (\tilde{U}(\gamma(s))\tilde{\Psi})(\gamma(s_1)),$$

где введено представление группы путей  $P$

$$(\tilde{U}(p)\tilde{\Psi})(p') = \tilde{\Psi}(p^{-1}p').$$

Таким образом, в подпространстве  $\tilde{\mathcal{H}}$  действие представления 2-путей  $U(S)$  полностью сводится к представлению группы путей  $\tilde{U}(P) = \beta(L) \uparrow P$ . Это значит, что при выполнении условия (5.1) среди состояний калибровочного диона есть состояния, ведущие себя как состояния локальной частицы.

Мы еще раз приходим к выводам, сделанным в начале § 4: условие (5.1) является необходимым и достаточным для того, чтобы калибровочный дион был локальной частицей. Это условие в соответствии с тем, что говорилось в гл. 7, § 10, означает, что 2-форма  $\mathcal{F}_{\mu\nu}^*(p)$  является обобщенной точной 2-формой. В частности, если эта форма абелева, то условие (5.1) означает, что она является точной в обычном смысле. В односвязной области это эквивалентно замкнутости (уравнению Максвелла). Если же форма неабелева, то ситуация гораздо сложнее. В этом случае для того, чтобы выполнялось условие (5.1), достаточно, чтобы калибровочное поле было самодуальным  $F_{\mu\nu}^* = F_{\mu\nu}$  (так как форма  $F$  в силу теоремы Стокса является обобщенной точной). Необходимым условием для (5.1) является уравнение Янга — Миллса, которое мы сейчас приведем.

В калибровочной теории принимается, что тензор  $F_{\mu\nu}$  удовлетворяет так называемому уравнению Янга — Миллса

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu}(x) = 0, \quad (5.2)$$



где введено обозначение для ковариантной производной тензора

$$\nabla_{\lambda} \Omega_{\mu\nu} = \partial_{\lambda} \Omega_{\mu\nu} - ie [A_{\lambda}, \Omega_{\mu\nu}].$$

Выражение, стоящее в уравнении слева, можно интерпретировать как ковариантную дивергенцию от тензора напряженности, поэтому уравнение Янга — Миллса аналогично уравнению Максвелла в электродинамике.

Можно записать уравнение Янга — Миллса и непосредственно через дифференциальные формы. Для этого вводится определение *ковариантной внешней производной* от неабелевой формы. Если 2-форма имеет вид  $\Omega = \Omega_{\mu\nu}(x) dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$ , то ее ковариантная производная (дифференциал) равна

$$D\Omega = (\nabla_{\lambda} \Omega_{\mu\nu}) dx^{\lambda} \wedge dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}.$$

Нетрудно показать, что в этих обозначениях уравнение Янга — Миллса принимает вид

$$DF^* = 0, \quad (5.2')$$

где фигурирует форма дуальной напряженности  $F^* = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^* dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$ . Можно показать непосредственно, что форма  $F_{\mu\nu}$  также удовлетворяет условию  $DF=0$ . Поэтому таким же свойством обладает и форма  $H = eF + gF^*$ , описывающая калибровочный дион.

Таким образом, форма  $H$  обладает нулевой ковариантной производной. К каким следствиям это приводит? Если бы форма  $H$  была абелевой, то условие  $dH=0$  означало бы, что форма замкнута и, следовательно, интеграл от нее по любой поверхности, являющейся границей, обращается в нуль. Для неабелевых форм аналогичное утверждение уже не имеет места. Однако имеет место более слабое утверждение, что интеграл от  $H$  по обобщенной 2-границе быстро стремится к нулю, когда размеры этой 2-границы уменьшаются.

Сформулируем это утверждение более точно. Пусть  $b$  — обобщенная 2-граница. Это значит, что  $b$  представляет собой семейство путей, заматающих замкнутую поверхность, являющуюся границей некоторой 3-мерной области. Обозначим диаметр этой области через  $\text{diam } b$ . Тогда

$$\chi(b) = 1 + O((\text{diam } b)^4). \quad (5.3)$$

Эта оценка является следствием условия  $DH=0$ , т. е. справедлива для любой 2-формы, имеющей нулевую ковариантную производную. Доказать ее можно, рассматривая интеграл по малому тетраэдру и вычисляя его в третьем порядке по размерам этого тетраэдра. Вычисления следует производить теми же способами, которые использовались в гл. 6, § 10 для доказательства теоремы Стокса. В пространстве с евклидовой топологией все обобщенные 2-циклы являются обобщенными 2-границами. Поэтому в таком простран-

стве имеет место равенство

$$\chi(c) = 1 + O((\text{diam } c)^4) \quad (5.3')$$

для любого обобщенного 2-цикла  $c \in C$ .

В начале параграфа было показано, что если  $\chi(c) = 1$  для любого  $c \in C$ , то калибровочный дион в данном поле является локальной частицей. Теперь мы видим, что в произвольном поле калибровочный дион ведет себя как локальная частица в достаточно малой области. Это означает, что если путь, ведущий в точку наблюдения диона, фиксирован по всей своей длине, кроме короткого последнего отрезка, то при изменении этого отрезка волновая функция зависит не от его формы, а лишь от конечной точки. При каких размерах области дион в ней можно считать локальной частицей, зависит, разумеется, от того, насколько сильно поле.

Возвращаясь к условию (5.1), мы видим, что класс калибровочных полей, удовлетворяющих этому условию (т. е. таких, в которых дион является локальной частицей), содержит класс самодуальных полей и принадлежит классу полей, удовлетворяющих уравнению Янга — Миллса. Интересную задачу представляет точная характеристика этого класса. Не исключено, что он исчерпывается классом самодуальных полей.

Мы должны еще показать, как из представления  $U(S)$  получаются представления  $U_{(p)}(P)$ , описанные в § 3 и соответствующие локальным дионам в условиях нарушения калибровочной инвариантности. Каждое из этих представлений характеризуется отображением  $\rho: x \rightarrow x_p$ , которое каждой точке ставит в соответствие путь, ведущий в эту точку. Возьмем реализацию пространства  $\mathcal{H}$  с помощью функций  $\psi(p)$  (см. § 4), и построим локальные функции  $\tilde{\psi}_{(p)}(x) = \psi(x_p)$ . Преобразование функции  $\psi(p)$  под действием представления  $U(S)$  описывается формулой (4.4). При таком преобразовании аргумент  $x_p$  превращается в  $s^{-1}x_p$ , что в общем случае нельзя представить как  $x'_p$ . Таким образом, преобразование функции  $\psi(p)$  под действием любых 2-путей не сводится к преобразованию функции  $\tilde{\psi}(x)$ .

Однако в группоиде 2-путей можно выделить подгруппоид, изоморфный группоиду путей  $P$ , который не нарушает структуру функций  $\tilde{\psi}(x)$ . Это выделение производится при помощи отображения  $\kappa: P \rightarrow S$ , которое строится точно так, как описано в § 3 (только там нам требовалось это отображение лишь на подгруппе  $L \subset P$ ). Если преобразовывать функцию  $\psi(p')$  с помощью  $U(s)$ , где  $s = \kappa(p)$ , то это приведет к преобразованию функции  $\tilde{\psi}(x)$  по формуле

$$(U_{(p)}(p) \tilde{\psi})(x) = \beta_{(p)}(p_{p^{-1}x}^x) \tilde{\psi}(p^{-1}x),$$

т. е. по индуцированному представлению  $U_{(p)}(P) = \beta_{(p)}(L) \uparrow P$ . Таким образом, локальные частицы, которые описываются представлениями  $\beta_{(p)}(L)$ , получаются из калибровочного диона, если рассматривать его волновые функции  $\psi(p)$  не при всех значениях аргумента, а лишь при значениях  $p = x_p$ , и соответствующим образом ограничить 2-пути, действующие на эти функции.

Подведем некоторые итоги. Налицо аналогия между описанием калибровочного диона и описанием калибровочной электрически заряженной частицы. Разница состоит лишь в переходе к более высокой размерности всех объектов. Волновая функция диона



зависит от путей и не может быть в общем случае сведена к функции точек. В пространстве этих волновых функций действует представление группоида 2-путей, позволяющее производить переход от одного пути к другому. Действие этого представления описывается упорядоченными экспонентами (4.1) от формы  $\mathcal{H}_{\mu\nu}(p)$  по тому 2-пути  $s$ , вдоль которого происходит переход от одного пути ( $s^{-1}p$ ) к другому ( $p$ ). Можно ввести здесь и аналог ковариантной производной, только роль обычных производных будет играть вариационная производная (описывающая изменение функции от пути при вариации этого пути), а в ковариантной производной к ней добавляется член, содержащий 2-форму  $\mathcal{H}_{\mu\nu}(p)$ .

Для нас сейчас существенно лишь одно обстоятельство: что *в произвольном калибровочном поле калибровочно инвариантное описание диона не может быть локальным*. В общем случае дион обязательно зависит от пути существенно, эту зависимость нельзя устранить. Несколько позднее мы попытаемся сделать из этого физические выводы, предложив модель кварков, основанную на нелокальных свойствах калибровочного диона. Сейчас же сделаем лишь одно общее замечание.

Мы пришли к теории *нелокальной частицы*, пытаюсь построить теорию калибровочного монополя или диона. Для этого стремления были основания, потому что теория абелева монополя строится без труда. Однако теперь, когда оказалось, что калибровочный дион в общем случае является нелокальным, напрашивается вопрос: а нет ли в природе других частиц, также существенно нелокальных. Разумеется, ответа на этот вопрос так просто дать нельзя, тем более, что и существование калибровочного диона остается лишь гипотезой. Однако следует заметить, что изложенный выше формализм представляет собой основу, на которой можно строить теорию путезависимых частиц. В этой теории роль группы симметрии будет играть уже не группа путей  $P$ , а группоид 2-путей  $S$ . Однако в ней будет много сходных черт, в том числе и понятие 2-мерной ковариантной производной.

Теория нелокальной частицы может исходить уже из произвольной 2-формы  $\mathcal{H}_{\mu\nu}(p)$ , не связанной непосредственно с напряженностью калибровочного поля. Следовательно, форма  $\mathcal{H}_{\mu\nu}(p)$  может представлять собой поле нового типа, «2-калибровочное поле». Так же, как теория заряженных частиц обязательно требует введения электромагнитного поля, теория калибровочно заряженных частиц — калибровочного поля, так же *теория произвольных нелокальных (путезависимых) частиц требует введения нового, 2-калибровочного поля*. Такая теория представляла бы собой обобщение обычной теории струн. Однако существенно в данном случае то, что для построения теории нелокальных частиц мы с самого начала имеем такой удобный и надежный ориентир, как теория групп. Можно надеяться, что это устранил некоторые неоднозначности в теории. Новое, «2-калибровочное» поле должно в такой теории играть роль переносчика взаимодействия струн.

## § 6. Калибровочный дион как модель цветных кварков

В предыдущих параграфах мы рассмотрели кинематику, которой должны были бы обладать калибровочные монополи и дионы, если бы они существовали. Естественно возникает вопрос о том, нет ли в природе объектов, которые могли бы описываться как монополи или дионы. Теперь мы попытаемся обосновать гипотезу, что такими объектами являются *кварки*. Точнее, рассмотрим модель кварка как диона — частицы, обладающей как калибровочным электрическим, так и калибровочным магнитным зарядами. Основным доводом в пользу такой модели является то, что при этом нелокальные свойства, характерные для диона, могут объяснять удержание кварков.

Характерное свойство калибровочного диона состоит в том, что его волновая функция зависит от пути существенно. Если обычный, электрический калибровочный заряд тоже может описываться функцией, зависящей от пути, то эта зависимость до некоторой степени является фиктивной. Она полностью регламентируется представлением группы петель  $\alpha(L)$ , и в принципе ее можно вообще устранить, перейдя к функции, зависящей от точек. В отличие от этого, волновая функция калибровочного диона зависит от пути произвольным образом, и эту зависимость устранить нельзя. Таким образом, калибровочный дион есть существенно нелокальный объект и не может наблюдаться как обычная локальная частица. Сейчас мы покажем, что состояние нескольких дионов может оказаться уже обычной локальной частицей.

В этом и состоит главная идея предлагаемой модели кварков. Если кварк является дионом, то он не может наблюдаться как локальная частица. Однако состояние кварка и антикварка или трех кварков оказывается обычной локальной частицей — *адроном*. Модель кварков как дионов позволяет, по крайней мере качественно, объяснить, почему кварки наблюдаются в связанных состояниях (как адроны) и не наблюдаются как свободные частицы. Пользуясь общепринятой терминологией, можно сказать так: предположение, что цветной мультиплет кварков является дионом, позволяет объяснить удержание кварков (конфайнмент).

Можно рассмотреть произвольные калибровочные дионы и доказать утверждение в общем случае. Однако для конкретности мы рассмотрим лишь случай, когда компоненты диона образуют триплет группы  $SU(3)$ . (На общепринятом языке это означает, что мы рассматриваем теорию с тремя цветами.)

Пусть калибровочная группа  $G = SU(3)$  действует в 3-мерном пространстве  $\mathcal{L}$ . Другими словами,  $\mathcal{L}$  — это пространство-носитель 3-мерного фундаментального представления группы  $SU(3)$ , которое можно отождествить с самой группой. Калибровочное поле имеет значения в алгебре Ли этой группы,  $A_\mu(x) \in \text{Alg} SU(3)$ , а соответствующее представление петель имеет значения в самой группе,  $\alpha(l) \in SU(3)$ . Напряженность калибровочного



поля и дуальная напряженность имеют значения в алгебре,  $F_{\mu\nu}(x)$ ,  $F_{\mu\nu}^*(x) \in \text{Alg } SU(3)$ .

Внутренние степени свободы калибровочного диона описываются представлением группы 2-петель  $\chi(K)$ , подробно обсуждавшимся в предыдущих параграфах. При каждом значении  $k \in K$  оператор  $\chi(k)$  действует в пространстве  $\mathcal{L}$ . Калибровочный дион описывается представлением  $\chi(K) \uparrow S = U(S)$  группоида 2-путей. Волновая функция его есть функция от путей  $\psi(p)$ . Она имеет значения в  $\mathcal{L}$ . Это значит, что волновая функция несет на себе индекс, принимающий 3 значения,  $\psi^A(p)$ ,  $A=1, 2, 3$ . Мы будем предполагать, что этот индекс описывает *цвета* частиц в  $SU(3)$ -теории сильных взаимодействий. Зависимость от пути означает, что дион является нелокальной частицей.

Теперь рассмотрим состояние трех дионов, так что все входящие в это состояние дионы имеют один и тот же путь:

$$\Psi^{ABC}(p) = \psi^A(p) \psi^B(p) \psi^C(p).$$

Предположение о совпадении путей необходимо для того, чтобы это состояние преобразовывалось по некоторому представлению группоида  $S$  (вспомним, что состояния с разными  $p$  некогерентны). Волновая функция этого состояния преобразуется под действием группы  $S$  по представлению  $(\chi \otimes \chi \otimes \chi) \uparrow S$ . Это представление очевидным образом разлагается в сумму индуцированных представлений, в соответствии с разложением на неприводимые компоненты представления  $\chi \otimes \chi \otimes \chi$ . Разложение на неприводимые компоненты соответствует разложению пространства  $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \times \mathcal{L}$  в сумму инвариантных (относительно  $SU(3)$ ) подпространств.

Нас будет интересовать тривиальная компонента этого разложения. Пусть она описывается матрицей  $g_{ABC}$ . Тогда волновая функция

$$\Psi(p) = g_{ABC} \Psi^{ABC}(p)$$

преобразуется по представлению  $1(K) \uparrow S$ , индуцированному из тривиального представления 2-петель. Но это значит, что такая волновая функция описывает на самом деле локальную частицу (см. в этой связи начало § 4, а также § 5). Хотя эта волновая функция формально по-прежнему зависит от пути, но такую зависимость можно устранить и перейти к локальной функции  $\Psi(x)$ . Дело в том, что в случае, когда внутренние степени свободы описываются представлением  $1(K)$ , существует корректно определенное представление петель  $\beta(l) \equiv 1$ , позволяющее устранить зависимость от пути, как это продемонстрировано в предыдущем параграфе \*).

---

\*) Для этого надо последовательно заменить функцию от  $p$  сначала на функцию от  $p_S$ , затем на функцию от  $\gamma(p_S)$  и, наконец — на функцию от точки  $\gamma(p_S)O$ . Однако тривиальность представления  $1(K)$  делает эти переходы очень простыми, и в результате имеем просто  $\Psi(p) = \Psi(pO)$ .

Таким образом, состояние трех дионов может быть локальной частицей. Это происходит тогда, когда это состояние характеризуется  $SU(3)$  — инвариантной сверткой индексов  $A, B, C$ . Если интерпретировать эти индексы как характеризующие цвет, то можно сказать, что *цветные (т. е. магнитно заряженные) частицы нелокальны, но их бесцветные комбинации являются обычными локальными частицами.*

Можно сказать, что обладающий цветом (или магнитным зарядом) дион подвешен на нити, которая является реальной и делает дион нелокальным. Бесцветное состояние трех дионов формально также подвешено на нити. Однако эта нить, склеенная из трех цветных нитей, является бесцветной (немагнитной) и потому фиктивной, т. е. устранимой. В результате такое состояние является локальной частицей.

Это свойство калибровочных дионов подсказывает мысль использовать их в качестве модели кварков. *Кварки* — это гипотетические частицы, из которых состоят тяжелые сильно взаимодействующие частицы — адроны. Хотя существование кварков косвенными методами доказано практически с полной достоверностью, но свободные кварки никогда не наблюдались. Это скорее всего указывает на то, что кварки обладают свойством, которое называют *конфайнментом* или *удержанием*: в качестве составных частей адронов, т. е. будучи на близком расстоянии друг от друга, кварки ведут себя практически как свободные частицы, однако удалиться друг от друга на далекое расстояние не могут. Кварки обладают особым квантовым числом, которое называется *цветом*. Оказывается, что *адроны* являются бесцветными комбинациями кварков, т. е. в этих состояниях цвета свернуты инвариантным образом. В наиболее распространенном варианте теории имеются кварки трех цветов. Бесцветное состояние трех кварков — это барион, а бесцветное состояние кварка и антикварка — мезон.

Нетрудно заметить, что свойство конфайнмента кварков сильно напоминает выведенное только что свойство калибровочных дионов. Каждый дион в отдельности является нелокальным (подвешен на нити) и, следовательно, не может наблюдаться в качестве обычной локальной частицы. В то же время специальным образом устроенные (бесцветные) состояния дионов ведут себя как обычные локальные частицы. Мы рассмотрели бесцветное состояние трех дионов. Но аналогичным образом можно построить бесцветное состояние диона и антидиона. Для этого следует определить антидион, например, с помощью комплексного сопряжения. Важно, чтобы антидион описывался представлением группы  $SU(3)$ , сопряженным по отношению к тому представлению, которым описывается дион.

На первый взгляд есть одно расхождение между свойствами кварков и калибровочных дионов. Кварки должны вести себя как свободные частицы, когда они, входя в состав бесцветного состояния, находятся на близком расстоянии друг от друга. Любой же дион, рассматриваемый сам по себе, является нелокальной части-



цей, т. е. не может обладать свойствами локальной частицы. Однако это не совсем так. В § 5 показано, что в силу уравнения Янга — Миллса калибровочный дион в достаточно малой области ведет себя как локальная частица.

Точнее это можно сформулировать так. Если положение нити, на которой подвешен калибровочный дион, зафиксировано почти по всей ее длине, а последний короткий отрезок нити варьируется, то волновая функция диона меняется при этом так, как будто она не зависит от точного положения этого последнего участка, а зависит лишь от положения его конца. В этом случае волновая функция диона становится функцией точки и дион ведет себя как локальная частица.

В применении к вопросу об удержании кварков-дионов это дает следующее. Пусть три кварка-диона образуют бесцветное состояние, в котором их пути совпадают не полностью, а отличаются короткими участками на концах этих путей (рис. 29). Тогда волновая функция этого состояния хотя формально зависит от трех путей, но фактически зависит только от их конечных точек,  $\Psi(p_1, p_2, p_3) = \Psi(x_1, x_2, x_3)$ . В этом случае нити трех дионов почти по всей длине обесцвечивают друг друга и становятся устраи-

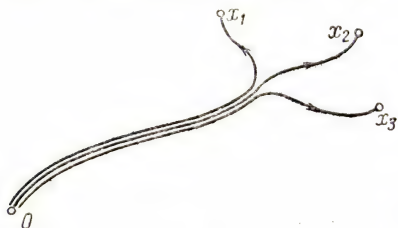


Рис. 29.

мыми. Можно перейти к волновой функции, которая зависит лишь от последних участков этих нитей, различающихся между собой. Но пока эти участки остаются достаточно короткими, зависимость от них тоже можно устранить, и остается зависимость лишь от конечных точек нитей. Состояние трех дионов в этом случае обладает точно такими же свойствами, как состояние трех локальных частиц. Однако так продолжается лишь до тех пор, пока хотя бы один из последних, различающихся участков нитей  $[x, x_1]$ ,  $[x, x_2]$ ,  $[x, x_3]$  не станет достаточно длинным. Как только это произойдет, эти участки станут реальными и сделают дионы нелокальными.

Можно, следовательно, уточнить свойство конфайнмента кварков-дионов. Ранее мы установили, что при полном слипании трех дионов они ведут себя как локальная частица. Теперь мы видим, что бесцветное состояние трех дионов может рассматриваться как состояние трех локальных частиц, когда они находятся на близких расстояниях друг от друга. Как только хотя бы один из дионов отойдет на большое расстояние, все они становятся нелокальными. *Кварки-дионы ведут себя как локальные частицы лишь в бесцветном состоянии на близком расстоянии друг от друга.*

Во всех рассмотренных, проведенных до сих пор, калибровочное поле считалось заданным классическим полем. Это же предположение неявно делалось при анализе конфайнмента кварков-

дионов, проведенном выше. Разумеется, такое рассмотрение может быть лишь приближенным, потому что калибровочное поле, в котором движутся три диона, образующих бесцветное состояние, создается самими же этими дионами. Полное рассмотрение этой задачи выходит за рамки книги. Однако можно думать, что анализ конфайнмента в предположении заданного калибровочного поля пригоден в качестве приближения. Действительно, такой подход соответствует приближению Хартри — Фока, при котором находится среднее поле, создаваемое всеми движущимися частицами, и затем рассматривается движение каждой частицы под действием этого поля, которое при этом считается уже фиксированным. Далее решается задача о самосогласованности такой картины. Выводы о конфайнменте кварков-дионов можно считать справедливыми в приближении самосогласованного поля. Количественные выводы, например о размерах области, в которой происходит удержание, можно сделать лишь при более детальном рассмотрении вопроса, которое должно включать также квантование калибровочного поля. Это выходит за рамки данной работы.

Рассмотрим модель кварков-дионов несколько более конкретно. Дион описывается 2-формой вида

$$H_{\mu\nu} = eF_{\mu\nu} + gF_{\mu\nu}^*. \quad (6.1)$$

Выводы о конфайнменте, сделанные выше, справедливы для любой частицы с  $g \neq 0$ . При этом величина постоянной  $e$  не играет роли. В реалистической модели кварков эта константа должна выбираться так, чтобы модель кварков-дионов по предсказываемым эффектам была близка к общепринятой сейчас модели сильных взаимодействий — *квантовой хромодинамике*, которая показала уже свою эффективность и позволила объяснить ряд количественных закономерностей сильных взаимодействий.

В квантовой хромодинамике взаимодействие кварков с глюонами, т. е. с калибровочным полем, вводится с помощью замены обычных производных на ковариантные. Это соответствует тому, что кварки движутся в калибровочном поле как обычные калибровочно заряженные частицы (частицы с электрическим калибровочным зарядом). Мы видели в главе 6, что такие частицы описываются представлением группы петель  $\alpha(L)$ . При желании можно их описать и представлением группы 2-петель  $\chi(K)$ , определив его 2-формой  $H_{\mu\nu}$ , в которой  $g=0$ . В § 5 было показано, что такое представление 2-петель эффективно сводится к представлению петель  $\alpha(L)$ .

Таким образом, модель кварков-дионов переходит в обычную квантовую хромодинамику, если положить  $g=0$ . Мы не можем этого сделать, так как конечная константа  $g$  необходима для получения конфайнмента. Однако мы можем принять, что  $g < e$  или даже  $g \ll e$ , чтобы модель кварков-дионов давала результаты, близкие к результатам квантовой хромодинамики. И действительно, если подчинить константы взаимодействия такому условию, то при малых расстояниях между кварками второй член



в формуле (6.1) не будет давать заметного вклада, так что свойства кварков при этом будут хорошо описываться квантовой хромодинамикой. Все количественные выводы из квантовой хромодинамики получены при изучении поведения кварков на малых расстояниях друг от друга. Поэтому все эти выводы останутся справедливыми и в дионной модели кварков. Однако при увеличении расстояния между кварками в конце концов наступит момент, когда второй член в (6.1) станет существенным. Действительно, он описывает нелокальные свойства кварков-дионов, которые малы на малых расстояниях, но начинают проявляться на больших расстояниях, приводя к конфайнменту. Следовательно, можно ожидать, что при  $g \ll e$  модель кварков-дионов на малых расстояниях совпадает с хромодинамикой, а на больших расстояниях описывает конфайнмент, возникающий за счет нелокальных свойств дионов.

Однако это не единственная возможность. В модели кварков можно положить  $e=0$ , т. е. считать кварки калибровочными монополями. Тогда при больших расстояниях между кварками они будут нелокальны, что приведет к конфайнменту. При малых же расстояниях, как было показано в § 5, монополи будут вести себя как локальные частицы. Это значит, что на малых расстояниях калибровочное поле действует на монополь так, как если бы дуальное поле  $F^*$  было потенциальным, т. е. выражалось в виде  $F^*=DB$  через некоторую 1-форму  $B$  (в абелевом случае это верно на любых расстояниях, см. § 1). Если вектор-потенциал  $B_\mu$ , определяющий форму  $B$ , отождествить с полем глюонов, то кварки-монополи на малых расстояниях будут вести себя относительно этого поля как частицы с обычным (электрическим) калибровочным зарядом величины  $g$  и опять-таки на малых расстояниях будет обеспечено согласие с квантовой хромодинамикой. На больших же расстояниях картина меняется настолько, что даже вектор-потенциал  $B_\mu$  перестает иметь смысл \*). С эстетической точки зрения модель, в которой кварки являются чистыми монополями, является предпочтительной. Однако само собой разумеется, что обе модели являются пока спекулятивными и по меньшей мере нуждаются в дальнейшей разработке.

Следует сказать еще несколько слов о нелокальных свойствах дионов и конфайнменте. До сих пор вывод о конфайнменте основывался на несколько туманном утверждении, что на больших расстояниях друг от друга кварки становятся нелокальными (зависящими от пути) объектами и не могут уже наблюдаться как обычные локальные частицы. Какой более точный смысл можно вложить в это утверждение?

---

\*) Возможно, этого достаточно, чтобы привести к конфайнменту глюонов. Если же нет, то для получения конфайнмента глюонов следует ввести существенную зависимость поля  $\mathcal{H}_\mu$  от пути, т. е. отказаться от структурного условия на это поле так же, как это было сделано для поля кварков.

Волновая функция локальной частицы  $\psi(x)$  — это амплитуда вероятности того, что частица находится в точке  $x$ . Волновая функция диона  $\psi(p)$  — это амплитуда вероятности того, что нить, на которой подвешен дион, имеет положение  $p$ . При этом мы можем по-прежнему поставить вопрос о том, какова амплитуда вероятности того, что сам дион находится в точке  $x$ . Чтобы получить такую амплитуду, мы должны воспользоваться правилом сложения амплитуд вероятности (гл. 2, § 1). Тогда окажется, что амплитуда вероятности того, что дион находится в точке  $x$ , равна сумме (интегралу) от  $\psi(p)$  по всем путям  $p$ , ведущим в точку  $x$ .

Определение такого интеграла, определение меры интегрирования — это по сути дела определение динамики кварка-диона или, если выразиться иначе, это определение динамики нити или струны, на которой держится дион. Это отдельный вопрос, которого мы не касаемся. Однако при любом определении меры интегрирования можно утверждать, что если функция  $\psi(p)$  не зависит от пути, а зависит только от конечной точки пути  $x=pO$ , то интегрирование даст конечную величину для амплитуды нахождения диона в точке  $x$ . Если же  $\psi(p)$  зависит и от самого пути, то вклады разных путей, как правило, будут компенсировать друг друга, и амплитуда нахождения диона в точке  $x$  либо обратиться в нуль, либо окажется очень малой величиной. Это и означает, что дион в сильном поле не может наблюдаться как локальная частица.

В заключение сделаем еще одно замечание. Если дионы, зависящие от пути, не могут отойти друг от друга далеко и проявиться при этом как локальные частицы, то ничто не запрещает им отойти друг от друга далеко, будучи при этом нелокальными объектами — струнами. Возможно, что картина таких кварков-струн, движущихся в более широкой области, чем область конфайнмента, позволит объяснить *партонную структуру адронов*. При этом можно надеяться, что зависимость волновой функции кварков-дионов от пути связана с продольной структурой партонной картины.

## § 7. Лептоны — это кварки, вырвавшиеся на свободу?

Мы видели в предыдущем параграфе, что на основе теории калибровочного диона можно построить модель кварков. Точнее, если предположить, что цветной мультиплет кварков — это калибровочный дион (относительно цветного, т. е. глюонного калибровочного поля), то удастся по крайней мере качественно объяснить удержание (конфайнмент) кварков. Удержание происходит из-за того, что кварки ведут себя как локальные частицы, лишь пока они находятся на близком расстоянии друг от друга, образуя бесцветное связанное состояние (модель адрона). В то же время в конце предыдущего параграфа показано, что в некоторых вариантах теории вероятность освобождения кварка и ухода его на большое расстояние от остальных может быть хотя и небольшой, но конечной.



Этот вывод приводит к интересному вопросу. Предположим, что кварк оторвется и выйдет за пределы сильного калибровочного поля. Что произойдет в этом случае?

Если кварк-дион оказывается в нулевом или очень слабом калибровочном поле, то форма  $F_{\mu\nu}^*(x)$  обращается в нуль или становится очень малой. При этом волновая функция диона перестает зависеть от пути и кварк-дион становится локальной частицей. В порядке мало обоснованной, но все же возможной гипотезы можно предположить, что такие оторвавшиеся кварки-дионы действительно наблюдаются. Быть может, некоторые из частиц, с которыми сталкивается физика, как раз и являются оторвавшимися кварками. Почему не предположить, например, что лептоны являются теми же кварками, но только в слабых глюонных полях. Вероятно, это возможно лишь в том случае, если кварки обладают целыми зарядами. Но существуют варианты теории, в которых это именно так.

Пока дион находится в нулевом или слабом поле, он ведет себя как обычная локальная частица. Но что произойдет, если два диона подойдут близко друг к другу? Тогда каждый из них приобретет нелокальные свойства, и вероятность проявления их как локальных частиц станет очень малой. Практически это означает, что вероятность того, что два диона подойдут близко друг к другу, очень мала. Возникает *обратный конфайнмент*: кварки-дионы удерживаются на сравнительно больших расстояниях друг от друга. При этом они могут взаимодействовать посредством дальнедействующих или сравнительно дальнедействующих полей, например слабого и электромагнитного.

Возникает соблазн отождествить кварки, вырвавшиеся на свободу, с *лептонами*. При этом кварки разных цветов ничем не будут отличаться друг от друга. Следовательно, должно существовать ровно столько лептонов, сколько существует разных типов или ароматов кварков. И действительно, на опыте наблюдается параллелизм между кварками и лептонами. По-видимому, опыт указывает на то, что между семейством кварков (если отождествить кварки разных цветов) и семейством лептонов существует взаимно однозначное соответствие.

Существует два возражения против такой гипотезы. Во-первых, кварки по данным расчетов имеют массы, примерно на порядок большие, чем массы соответствующих лептонов, а такие лептоны, как нейтрино, вообще имеют нулевую массу. (Впрочем, появились данные в пользу конечной массы нейтрино.) Эту трудность, вероятно, можно обойти, предположив, что массы кварков как составных частей адронов имеют динамическое происхождение и в свободном состоянии кварки обладают гораздо меньшими массами. Во-вторых, хотя цвета кварков и не проявляются динамически при отсутствии глюонного поля, однако все же делают кварки нетождественными. Следовательно, сформулированная гипотеза должна приводить к тому, что существует 3 разных электрона, 3 мюона и т. д. Но тогда становятся возможными многолеп-

тонные состояния, которые в обычной теории запрещены принципом Паули. А на опыте такие состояния не наблюдаются. Значит, по какой-то причине вырвавшиеся на свободу кварки разных цветов становятся совершенно тождественными.

На первый взгляд эта трудность является решающей. Однако на наш взгляд она основана лишь на широко распространенном, но неверном мнении, что *частицы* совершенно *тождественные* и *частицы*, отличающиеся друг от друга очень мало, ведут себя совершенно по-разному. Частицы являются различными в абсолютном смысле только в том случае, если в теории существует какой-либо *принцип суперотбора* и состояния рассматриваемых частиц принадлежат к различным секторам когерентности. Это значит, что не существует состояния, являющегося суперпозицией состояний одной частицы и состояния второй частицы. Именно так обстоит дело в случае, если частицы различаются электрическим или барионным зарядом (например, электрон и протон). Если же суперпозиции частиц в принципе возможны, то в некоторых условиях частицы могут вести себя как тождественные. Это полностью соответствует теории измерений, основанной на исчислении амплитуд вероятности (гл. 2, § 1). Конкретная процедура сложения амплитуд вероятности зависит от того, какую информацию в принципе можно получить в условиях данного эксперимента. Если частицы *в данном эксперименте* различить невозможно, то расчет для них следует вести в точности как для тождественных частиц (за исключением случая, когда имеется суперотбор).

Вопрос о тождественности и различимости частиц и о непрерывном переходе от различимых частиц к тождественным подробно проанализирован в ряде работ Любошица и других. Результаты этого анализа суммированы в книге [84]. Они позволяют последовательно решить ряд специфических «парадоксов разрывности», например парадокс Гиббса (разрыв в описании газа тождественных частиц и газа частиц, близких по своим свойствам). Из других работ на эту тему автору известна лишь работа [85].

В применении к интересующему нас сейчас вопросу это дает следующее. Кварки-дионы разных цветов являются когерентными (если конечно, другие их характеристики, *ароматы*, совпадают). Векторы, соответствующие разным цветам, можно складывать, что и делается, например, при образовании бесцветного состояния. Поэтому кварки-дионы разных цветов будут вести себя как различные частицы, если в условиях данного эксперимента или данной физической ситуации в принципе может быть получена информация об их цвете. Если же такой информации получить нельзя, то они будут вести себя как тождественные частицы.

Но ведь объектом, который реагирует на цвета, различает цвета, является калибровочное (глюонное) поле. Поэтому кварки-дионы разных цветов будут вести себя как различные частицы — в сильном калибровочном поле и как тождественные частицы — в нулевом или очень слабом калибровочном глюонном поле. Именно это и нужно для того, чтобы гипотеза о тождественности



кварков и лептонов была внутренне непротиворечивой. Связанные глюонным полем дионы представляют собой кварки и являются различимыми по цвету частицами. В то же время свободные (по отношению к сильному, глюонным взаимодействиям) дионы разных цветов ведут себя как тождественные частицы — лептоны.

Таким образом, предлагается гипотеза, в которой кварки ( $u$ ,  $d$ ,  $s$ ,  $c$ ,  $b$ ,  $t$ ) должны отождествляться с лептонами ( $\nu_e$ ,  $e$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\mu$ ,  $\nu_\tau$ ,  $\tau$ ). Последние два из этой серии кварков еще достоверно не установлены, хотя практически мало кто сомневается в их существовании. Последними в серии лептонов фигурируют тяжелый лептон и соответствующее ему нейтрино. Существование их установлено косвенно, но практически достоверно.

В рамках предлагаемой гипотезы несколько иначе выглядят такие процессы, как превращение электрон-позитронной пары в мезон. Обычно такое превращение рассматривают как двухступенчатый процесс, состоящий из аннигиляции ( $e^+e^-$ ) пары в фотон с последующим рождением из этого фотона пары кварк-антикварк, которые образуют связанное состояние, т. е. мезон. Теперь же можно думать, что это превращение может идти еще и по другому каналу: электрон и позитрон, представляющие собой свободные дионы, сталкиваются и преодолевают барьер обратного конфайнмента, препятствующий их сближению. В результате они сближаются и образуют связанное бесцветное состояние — мезон. Теперь те же самые дионы ведут себя как кварки, в частности, проявляется их цвет.

Кроме этого, в рамках предлагаемой гипотезы становятся возможными другие, более специфические для нее процессы. Предположим, что один из трех кварков, образующих барион, вырывается на свободу и становится лептоном. Тогда оставшиеся два кварка тоже уже не связаны конфайнментом и не обязаны оставаться близко друг к другу. В результате они также оказываются далеко друг от друга, т. е. в области, где глюонное поле является слабым. Это значит, что все три кварка превращаются в лептоны. Следовательно, это механизм, посредством которого (правда, с очень малой вероятностью) может происходить распад адрона на 3 лептона. В частности, *протон в такой схеме является уже нестабильным*. Это сближает предлагаемую модель с моделями гранд-объединения. Впрочем, по существу рассматриваемая модель и является одной из разновидностей *великого объединения* или *гранд-объединения*, только более экономной, чем предлагавшиеся до сих пор, так как содержит меньшее количество частиц. Эта модель основана на группе  $SU(3) \times SU(6)$ , где первый из сомножителей описывает цвета, а второй — ароматы кварков. В общем случае это может быть группа  $SU(m) \times SU(n)$ , где  $m$  — количество цветов, а  $n$  — количество ароматов.

Заканчивая обсуждение модели кварков как калибровочных дионов, нелишне будет заметить, что она является, разумеется, чисто спекулятивной. Для того чтобы говорить о такой модели как о серьезной альтернативе или даже просто коррективе к кван-

товой хромодинاميке, взятой в чистом виде, следует гораздо более тщательно проанализировать ее следствия. Притом это необходимо сделать на более глубоком уровне, учтя эффекты квантования калибровочного поля. Мы не имеем такой возможности.

Тем не менее обсуждение дионов как модели кварков кажется полезным хотя бы для того, чтобы яснее продемонстрировать отличия дионов от обычных частиц. Скептик и даже просто осторожный человек может относиться к последним двум параграфам как к иллюстрации физических свойств калибровочных дионов, не претендующей всерьез на объяснение каких бы то ни было реальных объектов.

## Глава 9

### СОСТОЯНИЯ ЧАСТИЦ В КАЛИБРОВОЧНОМ ПОЛЕ И ИХ ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Теорию свободных релятивистских частиц можно строить на основе группы Пуанкаре и ее представлений. В гл. 6, § 5 очень кратко изложен один из вариантов такого построения (детальное изложение его можно найти в книге [37]). В этом варианте локальные или кинематические свойства частицы описываются представлением группы Пуанкаре, индуцированным из подгруппы Лоренца, а глобальные или динамические свойства ее — неприводимым представлением группы Пуанкаре. Полное описание частицы основано на переплетении этих двух представлений, которое позволяет записать неприводимое представление в координатной форме.

В главе 6 были сделаны первые шаги, для того чтобы развить подобную схему для частиц во внешнем калибровочном поле. Было показано, что локальные свойства частицы или, что то же, ее кинематика может быть описана с помощью представления группы путей, индуцированного из подгруппы петель. Теперь наша задача будет состоять в том, чтобы описать на теоретико-групповом языке глобальные или динамические свойства частицы во внешнем поле.

Для этого будет использовано уже исследованное индуцированное представление группы путей, генераторами которого являются ковариантные производные. В сущности динамика частицы во внешнем поле строится очень просто. Следует лишь в уравнении движения свободной частицы заменить обычные производные на ковариантные. Однако полная теоретико-групповая интерпретация получающейся при этом схемы не так проста, как можно было бы ожидать. Оказывается, что пространство реальных состояний частицы, т. е. решений уравнения движения, уже не инвариантно относительно группы путей, так что полная аналогия со случаем свободной частицы невозможна.

Вместо этого, однако, возникает другая и тоже интересная теоретико-групповая схема. Оказывается, что каждое реальное состояние является ядром оператора переплетения двух представ-



лений группы путей. Одно из них (исследованное ранее индуцированное представление) содержит информацию о внешнем поле, т. е. о геометрии пространства-времени, но не содержит никакой информации о параметрах частицы (за исключением ее «калибровочного заряда»). Второе, напротив, содержит информацию о параметрах частицы (например, о массе), но не о геометрии. Реальное состояние переплетает эти два представления, т. е. вкладывает данную частицу в данную геометрию. Разные состояния соответствуют разным способам такого вложения. Для описания всех степеней свободы частицы, включая спинные, будет введена обобщенная группа Пуанкаре, которая отличается от обычной группы Пуанкаре заменой группы трансляций на группу путей.

В конце главы будет показано, как решения уравнений движения, т. е. реальные состояния, можно записать в виде интегралов по путям и какую роль в таких интегралах играет представление группы путей. В связи с этим мы обсудим физический смысл группы путей и некоторые связанные с ней возможности развития квантовой теории поля.

## § 1. Уравнения движения частиц в калибровочном поле

В главе 6 было показано, что локальные свойства частиц, движущихся в калибровочном поле, описываются индуцированным представлением группы путей  $U(P) = \alpha(L) \uparrow P$ . Это означает, что пространство локализованных состояний частицы  $\mathcal{H}$  состоит из функций  $\Psi(p)$  на группе путей со значениями в пространстве  $\mathcal{L}_\alpha$  (пространство-носитель представления петель  $\alpha$ ), удовлетворяющих структурному условию

$$\Psi(pl) = \alpha(l^{-1}) \Psi(p), \quad (1.1)$$

а представление  $U(P)$  действует в этом пространстве левыми сдвигами.

Вместо этого можно реализовать пространство  $\mathcal{H}$  как пространство всех функций  $\phi(x)$  на пространстве Минковского  $\mathcal{M}$  со значениями в  $\mathcal{L}_\alpha$ . Тогда представление  $U$  действует по формуле

$$(U(p)\phi)(x) = \alpha(p_{p^{-1}x}^x) \phi(p^{-1}x),$$

где  $\alpha(p_{x'}^x)$  — упорядоченная экспонента

$$\alpha(p_{x'}^x) = P \exp \left\{ i \int_{p_{x'}^x} A_\mu dx^\mu \right\}.$$

Действие оператора  $U(p)$  на функцию  $\phi(x)$  можно выразить и через ковариантную производную

$$\nabla_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - iA_\mu(x)$$

с помощью формулы

$$U(p) = P \exp \left\{ - \int_p \nabla_\mu dx^\mu \right\}. \quad (1.2)$$

Не все векторы из пространства  $\mathcal{H}$  соответствуют реальным состояниям частиц. Действительно, функции  $\psi(x)$  могут быть сосредоточены в любой, сколь угодно малой области пространства Минковского  $\mathcal{M}$ , даже в единственной точке этого пространства (в последнем случае они являются обобщенными векторами). Поэтому возникает вопрос об описании реальных состояний частиц. Этот вопрос применительно к свободным частицам подробно обсуждался в работах [36, 37]. Основной вывод, который понадобится нам здесь, состоит в том, что реальные состояния описывают глобальные свойства частицы, те свойства, которыми частица обладает как целое, по отношению ко всему пространству-времени. Реальные состояния свободных частиц описываются неприводимым представлением группы Пуанкаре. Теперь задачей является описание реальных состояний частицы в калибровочном поле и интерпретация их с точки зрения группы путей.

С прагматической точки зрения проблемы здесь вообще нет, потому что способ описания реальных состояний известен — это ковариантное уравнение движения. По сути дела проблемой является лишь групповая интерпретация таких состояний. Необходимость такой интерпретации состоит не только в том, что без нее групповой подход будет незавершенным. Главным является то, что теоретико-групповая интерпретация реальных состояний открывает возможности для дальнейших обобщений, которые могут привести к новым физическим выводам.

Чтобы описать реальные состояния, необходимо прежде всего ввести спинные степени свободы. Они описываются некоторым представлением  $\sigma(\Lambda)$  группы Лоренца  $\Lambda$ . Если представление  $\sigma$  действует в пространстве  $\mathcal{L}_\sigma$ , то волновая функция реального состояния (которую мы обозначим той же буквой  $\psi(x)$ ) имеет значения в пространстве  $\mathcal{L}_\sigma \times \mathcal{L}_\sigma$ , т. е. кроме зарядового индекса у нее появляется спинный индекс. Реальное состояние описывается не любой функцией такой структуры, а лишь функцией, удовлетворяющей уравнению движения. Это уравнение получается из уравнения движения свободной частицы, если все входящие в него производные заменить на ковариантные. Простейшим уравнением движения является уравнение Клейна — Гордона. Оно описывает скалярные частицы, т. е.  $\mathcal{L}_\sigma = \mathbb{C}$  и  $\sigma(l) \equiv 1$ . Для скалярных частиц в калибровочном поле ковариантное уравнение Клейна — Гордона имеет вид

$$(\square + m^2)\psi(x) = 0,$$

где введено обозначение для ковариантного даламбертиана:

$$\square = \eta^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu.$$



Частицы спина  $1/2$  описываются спинорным представлением группы Лоренца. Пространство  $\mathcal{L}_s$  в этом случае 4-мерно, а уравнением движения является ковариантное уравнение Дирака

$$(i\gamma^\mu \nabla_\mu - m)\psi(x) = 0, \quad (1.3)$$

где  $\gamma^\mu$  — матрицы Дирака.

Точно так же для описания частиц любых спинов имеется некоторое уравнение движения (см., напр., [37]). Однако любое уравнение можно привести к виду (1.3), подобрав соответствующим образом матрицы  $\gamma^\mu$ . Это относится и к уравнению Клейна—Гордона. Примером уравнения вида (1.3) для спинов, отличных от  $1/2$ , является уравнение Кеммера — Дэффина. В общем случае такое уравнение называется уравнением Гельфанда — Яглома.

Вспоминая, что ковариантная производная является генератором представления группы путей (1.2), мы можем заключить, что уравнение движения накладывает определенные ограничения на преобразование волновой функции под действием элементов группы путей, бесконечно близких к единице. Это можно выразить и на языке функций  $\Psi(p)$ . Обозначим генератор представления в этом случае через  $\delta_\mu$ , так что

$$(\delta_\mu \Psi)(p) = \left[ \frac{\partial}{\partial a^\mu} \Psi(a_F^{-1}p) \right]_{a=0}, \quad (1.4)$$

где  $a_F$  — короткий прямолинейный путь,  $a_F = \{\tau a | 0 \leq \tau \leq 1\}$ . Если уравнение движения в ковариантной форме имеет вид

$$W(\nabla)\psi = 0, \quad (1.5)$$

то для соответствующей функции от путей оно принимает вид

$$W(\delta)\Psi = 0. \quad (1.6)$$

Таким образом, реальное состояние, будучи описано функцией от путей, подчиняется двум условиям. Одно из них — структурное условие (1.1) — регламентирует свойства этой функции относительно правого сдвига аргумента, а второе (1.6) регламентирует свойства этой функции относительно левого сдвига. Функции с двусторонним структурным условием служат ядрами операторов переплетения двух индуцированных представлений [37]. Это подсказывает теоретико-групповую интерпретацию реальных состояний как ядер переплетения. Чтобы сделать эту интерпретацию полной, нам необходимо перейти к более широкой группе, которая содержит как группу путей, так и группу Лоренца.

## § 2. Обобщенная группа Пуанкаре

Для теоретико-группового описания спина частиц перейдем к группе, содержащей как пути, так и преобразования Лоренца. Такая группа обобщает группу Пуанкаре, и из этого однозначно следует ее структура. Произвольным элементом обобщенной

группы Пуанкаре  $Q$  является произведение  $q=\lambda p$ , где  $\lambda \in \Lambda$  — элемент группы Лоренца, а  $p \in P$  — элемент группы путей. Произведение в группе  $Q$  будет однозначно определено, если задать лишь правило перестановки элементов из  $\Lambda$  и из  $P$ . Это следует сделать по аналогии с группой Пуанкаре:

$$\lambda [\xi] \lambda^{-1} = [\lambda \xi]. \quad (2.1)$$

Здесь  $[\lambda \xi]$  обозначает путь, преобразованный с помощью  $\lambda \in \Lambda$ . Это значит, что если  $[\xi] = \{\xi(\tau) \in \mathcal{M}\}$ , то  $[\lambda \xi] = \{\lambda \xi(\tau)\}$ .

Если принять правило коммутации (2.1), то легко вывести правило умножения для любых двух элементов обобщенной группы Пуанкаре:

$$q'q = \lambda' [\xi'] \cdot \lambda [\xi] = \lambda' \lambda \cdot [\lambda^{-1} \xi'] [\xi]. \quad (2.2)$$

Тем самым группа  $Q$  определена полностью. Нетрудно видеть, что роль обратного элемента в ней играет

$$(\lambda [\xi])^{-1} = [\xi]^{-1} \lambda^{-1} = \lambda^{-1} [\lambda \xi]^{-1}.$$

Правило перестановки (2.1) позволяет любой элемент группы  $Q$  записать в виде  $p\lambda$ , т. е. в виде произведения, в котором элемент группы Лоренца стоит справа. В этом случае правило умножения в группе  $Q$  принимает такой вид:

$$qq' = [\xi] \lambda \cdot [\xi'] \lambda' = [\xi] [\lambda \xi'] \lambda \lambda'.$$

При описании свободных частиц вместо функции на пространстве Минковского можно использовать функцию на группе Пуанкаре, подчиненную дополнительному условию. Точно так же при описании частиц в калибровочном поле вместо функции  $\Psi(p)$  на группе путей можно использовать функцию на обобщенной группе Пуанкаре  $\Psi(q)$ . Так же как и функция  $\Psi(p)$ , эта функция имеет значения в пространстве  $\mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{L}_\sigma$ , где  $\mathcal{L}_\sigma$  — пространство-носитель представления  $\sigma(\Lambda)$ . Эта функция должна быть подчинена дополнительному условию

$$\Psi(\lambda q) = \sigma(\lambda) \Psi(q). \quad (2.3)$$

Такое структурное условие позволяет свести функцию на группе  $Q$  к функции от путей:

$$\Psi(q) = \Psi(\lambda p) = \sigma(\lambda) \Psi(p).$$

Отображение  $p \mapsto \Psi(p)$  совпадает с той функцией от путей, которая фигурировала в предыдущем параграфе. Поэтому она подчинена условию (1.6). В силу ковариантности уравнения поля это условие можно переписать как условие на функцию  $\Psi(q)$ . Оно будет выглядеть буквально так же:

$$W(\delta) \Psi = 0, \quad (2.4)$$

но теперь оператор  $\delta_\mu$  следует понимать как оператор, действующий



ций на функции, зависящие от  $q \in Q$ :

$$(\delta_\mu \Psi)(q) = \left[ \frac{\partial}{\partial a^\mu} \Psi(a_F^{-1} q) \right]_{a=0}. \quad (2.5)$$

Наконец, функции  $\Psi(q)$ , описывающие реальные состояния частиц, должны удовлетворять еще структурному условию

$$\Psi(ql) = \alpha(l^{-1}) \Psi(q). \quad (2.6)$$

Таким образом, *реальные состояния* частиц описываются функциями на обобщенной группе Пуанкаре, удовлетворяющими трем условиям (2.3), (2.4), (2.6). Одно из этих условий содержит правый сдвиг аргумента, а два других — левый сдвиг. Такого рода двусторонние структурные условия характерны для ядер операторов, переплетающих два индуцированных представления. Это наводит на мысль интерпретировать реальные состояния частиц как операторы переплетения двух представлений обобщенной группы Пуанкаре. Это будет сделано в следующем параграфе. Однако при желании этот параграф можно пропустить без ущерба для понимания дальнейшего материала. То же самое относится и к § 4\*.

### § 3\*. Состояния частиц как операторы переплетения представлений

В предыдущем параграфе было показано, что реальные состояния частиц в калибровочном поле можно описывать функциями  $\Psi(q)$ , заданными на обобщенной группе Пуанкаре и имеющими значения в пространстве  $\mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{L}_\sigma$ . Эти функции должны удовлетворять уравнению движения  $W(\delta) \Psi = 0$  и условию

$$\Psi(\lambda ql) = \alpha(l^{-1}) \times \sigma(\lambda) \Psi(q).$$

В этом структурном условии фигурирует как левый, так и правый сдвиг. Поскольку такие двусторонние структурные условия характерны для ядер переплетения двух индуцированных представлений, возникает мысль интерпретировать состояния частиц как операторы переплетения двух представлений обобщенной группы Пуанкаре.

Чтобы пояснить это, прежде всего будем считать  $\Psi(q)$  не вектором в пространстве  $\mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{L}_\sigma$ , а оператором, переводящим из  $\mathcal{L}_\alpha$  в  $\mathcal{L}_\sigma$ . Это обычный произвол, позволяющий считать величину с двумя индексами либо вектором, либо матрицей. Для точного определения используем скалярное произведение  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  в пространстве  $\mathcal{L}_\sigma$ , инвариантное относительно представления  $\alpha(L)$ . Определим оператор  $\chi(q): \mathcal{L}_\alpha \rightarrow \mathcal{L}_\sigma$ , полагая

$$\chi(q)f = \langle \Psi(q), f \rangle$$

для каждого  $f \in \mathcal{L}_\alpha$ . Нетрудно видеть, что полученная таким образом функция  $\chi(q)$  удовлетворяет уравнению движения  $W(\delta) \chi = 0$  и структурному условию

$$\chi(\lambda ql) = \sigma(\lambda) \chi(q) \alpha(l) \quad (3.1)$$

для любых  $l \in L$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . Сейчас мы рассмотрим теоретико-групповой смысл структурного условия (3.1). Для этого нам понадобятся некоторые сведения из теории индуцированных представлений групп.

Пусть  $Q$  — произвольная группа и  $L$ ,  $\Lambda$  — ее подгруппы. Рассмотрим представления группы  $Q$ , индуцированные из этих подгрупп,  $U_\alpha(Q) = \alpha(L) \uparrow Q$  и  $U_\sigma(Q) = \sigma(\Lambda) \uparrow Q$ . Представление  $U_\alpha$  реализуем обычным образом. Это значит, что оно действует в пространстве  $\mathcal{H}_\alpha$  функций на группе  $Q$  (обозначим их  $\Psi_\alpha(q)$ ) со значениями в пространстве  $\mathcal{L}_\alpha$  (носитель представления  $\alpha(\bar{L})$ ), удовлетворяющих структурному условию

$$\Psi_\alpha(q'l) = \alpha(l^{-1}) \Psi_\alpha(q). \quad (3.2)$$

Представление  $U_\alpha(Q)$  действует на эти функции левым сдвигом

$$(U_\alpha(q) \Psi_\alpha)(q') = \Psi_\alpha(q^{-1}q').$$

Представление  $U_\sigma(Q)$  реализуем несколько иным, но эквивалентным способом. Разница по сравнению с тем определением индуцирования, которое мы принимали до сих пор, заключается в том, что *правые классы смежности по подгруппе заменяются левыми классами смежности, а правые и левые сдвиги меняются ролями*. Будем считать, что представление  $U_\sigma$  действует в пространстве  $\mathcal{H}_\sigma$  функций на группе  $Q$  со значениями в пространстве  $\mathcal{L}_\sigma$ . Подчиним эти функции структурному условию относительно левых сдвигов

$$\Psi_\sigma(\lambda q) = \sigma(\lambda) \Psi_\sigma(q), \quad (3.3)$$

а само представление будет действовать на эти функции правым сдвигом:

$$(U_\sigma(q) \Psi_\sigma)(q') = \Psi_\sigma(q'q).$$

Можно было бы воспользоваться для представления  $U_\sigma$  обычной реализацией, но для нас более удобна такая реализация, которая только что введена.

Теперь рассмотрим переплетение этих двух представлений. *Оператором переплетения* двух представлений  $X \in [U_\alpha, U_\sigma]$  называется такой линейный оператор  $X: \mathcal{H}_\alpha \rightarrow \mathcal{H}_\sigma$ , который коммутирует с представлениями, т. е. для любых  $q \in Q$  выполняется равенство

$$XU_\alpha(q) = U_\sigma(q)X.$$

В теории индуцированных представлений доказывается (см., например, [37]), что любой оператор переплетения двух индуцированных представлений может быть выражен в форме интегрального оператора

$$\Psi_\sigma(q) = (X\Psi_\alpha)(q) = \int_{q'l} d\mu(q'l) \chi(q') \Psi_\alpha(q^{-1}q'). \quad (3.4)$$



Здесь интеграл берется по *инвариантной мере* на фактор-пространстве  $Q/L$ , т. е. на пространстве правых классов  $q'L$ , а функция  $\chi(q)$  имеет своими значениями операторы из  $\mathcal{L}_\alpha$  в  $\mathcal{L}_\sigma$  и подчинена структурному условию (3.1).

В силу структурных условий на функции  $\chi$  и  $\Psi_\alpha$  подынтегральное выражение не зависит от выбора представителя  $q'$  в каждом смежном классе  $q'L$ . В силу инвариантности меры и структурного условия на  $\chi$  функция  $\Psi_\sigma$ , определяемая интегралом, автоматически удовлетворяет нужному структурному условию. Наконец, непосредственно видно, что левый сдвиг функции  $\Psi_\alpha$  соответствует правому сдвигу функции  $\Psi_\sigma$ , т. е. оператор  $X$  коммутирует с индуцированными представлениями  $U_\alpha$  и  $U_\sigma$ . Это показывает, что интегральный оператор такого вида является оператором переплетения. Можно доказать и обратное, а именно, что каждый оператор переплетения представляется в таком виде, при надлежащем выборе функции  $\chi$  (подробнее см., например, [37]).

Перейдем к интересующему нас случаю, когда  $Q$  — обобщенная группа Пуанкаре,  $L$  — подгруппа петель и  $\Lambda$  — подгруппа Лоренца. Мы видели в гл. 6, что фактор-пространство  $P/L$  — это не что иное, как пространство Минковского или группа трансляций. Действительно, факторизация по петлям приводит к тому, что все пути, ведущие в одну и ту же точку, попадают в один класс смежности, так что пространство классов — это пространство точек,  $pL=x$ . Теперь мы добавили еще группу Лоренца, и фактор-пространство  $Q/L=\Pi$  теперь совпадает с группой Пуанкаре (фактически это фактор-группа, но сейчас нас интересует лишь структура однородного пространства на ней). Действие группы  $Q$  на  $\Pi$  сводится к действию группы Пуанкаре на самой группе Пуанкаре левыми сдвигами. Следовательно, мера  $d\mu(\pi)$ , фигурирующая в формуле (3.4), — это просто инвариантная мера (мера Хаара) на группе Пуанкаре.

Если функция  $\chi(q)$ , ядро оператора переплетения, подчинена лишь структурному условию (3.1), то мы получаем оператор переплетения двух индуцированных представлений  $U_\alpha$  и  $U_\sigma$ . Если же на функцию  $\chi$  наложить еще условие, эквивалентное уравнению движения,

$$W(\delta)\chi=0, \quad (3.5)$$

то та же формула (3.4) дает оператор переплетения представления  $U_\alpha$  с другим представлением  $U_{\sigma W}$  группы  $Q$ . Это представление действует в пространстве  $\mathcal{H}_{\sigma W}$  функций  $\Psi_{\sigma W}: Q \rightarrow \mathcal{L}_\sigma$ , удовлетворяющих не только структурному условию (3.3), но еще и уравнению движения:

$$\begin{aligned} \Psi_{\sigma W}(\lambda q) &= \sigma(\lambda) \Psi_{\sigma W}(q), \\ W(\delta) \Psi_{\sigma W} &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Представление  $U_{\sigma W}(Q)$  действует в пространстве  $\mathcal{H}_{\sigma W}$  правыми сдвигами:

$$(U_{\sigma W}(q) \Psi_{\sigma W})(q') = \Psi_{\sigma W}(q'q).$$

Таким образом, мы получили теоретико-групповую интерпретацию реальных состояний частиц в калибровочном поле. В отличие от свободных частиц, эти состояния не образуют пространства, инвариантного относительно действия группы путей или обобщенной группы Пуанкаре. Вместо этого каждое состояние  $\chi$  определяет интегральный оператор  $X$ , связывающий два таких инвариантных пространства,  $\mathcal{H}_\alpha$  и  $\mathcal{H}_{\alpha w}$ . В пространстве  $\mathcal{H}_\alpha$  действует индуцированное представление  $U_\alpha(Q) = \alpha(L) \uparrow Q$ . Это пространство состоит из локализованных состояний, подробно рассмотренных в главе 6 (правда, там мы игнорировали спинорные индексы). Это пространство описывает только локальные свойства частиц. Как мы видели в главе 6, локальные свойства задаются калибровочным полем и калибровочным зарядом частицы.

С другой стороны, пространство  $\mathcal{H}_{\alpha w}$  и действующее в нем представление  $U_{\alpha w}(Q)$  описывают глобальные свойства частицы, ее динамику. Однако при этом совершенно игнорируется геометрия пространства-времени (калибровочное поле) и заряд частицы. Состояние же частицы  $\chi(q)$  переплетает эти два представления, т. е. описывает, каким образом частица с данными динамическими свойствами (массой и спином) вкладывается в данную геометрию (калибровочное поле).

Это интересная картина, которая, видимо, еще нуждается в дальнейшем анализе и осмыслении. Упомянем лишь одно возможное использование этой конструкции. То, что мы называем здесь реальными состояниями частицы — это идеализация. Такая идеализация предполагает, что частица существует в течение бесконечного интервала времени и имеет точно определенную массу. На самом деле любая частица наблюдается или даже существует в ограниченной пространственно-временной области, и измерения в этой области могут дать значения ее массы лишь с конечной точностью. Для описания этой ситуации можно использовать переплетение двух представлений  $U_\alpha$ ,  $U_{\alpha w}$ . Рассмотрим локализованное состояние  $\Psi_\alpha \in \mathcal{H}_\alpha$ , сосредоточенное в некоторой конечной области пространства-времени. Эта функция не содержит в себе никакой информации о частице, кроме ее заряда, зато содержит информацию о геометрии пространства-времени. Под геометрией мы понимаем калибровочное поле, которое можно рассматривать как связность в расслоении над пространством-временем. Калибровочный заряд частицы характеризует реакцию частицы на геометрию, именно поэтому он появляется уже на этом этапе. Функцию  $\Psi_\alpha$  можно рассматривать, например, как характеристику условий наблюдения частицы. Соответствующая ей локальная функция  $\phi_\alpha(x) = \alpha(x_P) \Psi_\alpha(x_P)$  может быть, например, равна единице в области наблюдения и равна нулю вне ее.

Теперь возьмем некоторое реальное состояние частицы  $\chi(q)$  и по формуле (3.4) найдем функцию  $\Psi_\alpha(q)$ . Эта функция содержит уже информацию о характеристиках частицы (ее массе и спине) и о конкретном динамическом состоянии частицы. Эта информация вошла через функцию  $\chi(q)$ . И в то же время функция  $\Psi_\alpha$  сохраняет



информацию об условиях наблюдения частицы, в частности о том, что частица наблюдается лишь в ограниченной области пространства-времени. Это приведет к тому, что информация о массе частицы будет частично потеряна. Функция  $\Psi_q$  характеризуется не определенной массой, а скорее некоторым, более или менее узким, спектром масс. Таким образом, волновая функция  $\Psi_q$  описывает *динамику частицы в реальных условиях наблюдения*.

#### § 4\*. Обобщенная группа Пуанкаре как группа преобразований системы отсчета

До сих пор мы пользовались для описания частиц в калибровочном поле формализмом, разработанным в гл. 6. Он основывается на том, что в пространстве Минковского выбирается определенная система отсчета, т. е. начало отсчета  $O \in \mathcal{M}$  и некоторый ортонормированный репер. Этим в пространстве Минковского вводится система отсчета, по отношению к которой описывается и калибровочное поле, и состояние частицы. Состояние частицы описывается волновой функцией  $\Psi(q)$  (на обобщенной группе Пуанкаре), удовлетворяющей структурным условиям (2.3), (2.6) и уравнению поля (2.4). В предыдущем параграфе было показано, что такую волновую функцию можно интерпретировать как оператор переплетения двух представлений обобщенной группы Пуанкаре  $Q$ . В то же время эти волновые функции не инвариантны относительно действия на них группы  $Q$ . Однако если рассмотреть совокупность волновых функций, отнесенных к всевозможным системам отсчета в пространстве Минковского, то на такой совокупности можно определить действие группы  $Q$ . Сейчас мы реализуем эту возможность. Будет построено пространство состояний частицы, в котором действует представление группы  $Q$ , причем преобразование из этой группы является переходом к новой системе отсчета.

В § 2 было показано, что состояния частицы можно описывать волновыми функциями  $\Psi(q')$  на группе  $Q$  со значениями в пространстве  $\mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{L}_\sigma$ , если подчинить эти функции уравнению движения (2.4) и структурным условиям (2.3), (2.6). Переход к локальным волновым функциям совершается по формуле

$$\psi(x) = \alpha(p') \Psi(p'),$$

где  $p'$  — любой путь, ведущий из точки  $O$  в точку  $x$ , т. е.  $p'O = x$ . Рассмотрим теперь функции, получаемые *правым сдвигом* аргумента:  $\Psi_q(q') = \Psi(q'q)$ . Такие функции удовлетворяют тому же уравнению движения, но структурные условия принимают для этих функций вид

$$\Psi_q(\lambda q' l) = [\alpha(q^{-1} l^{-1} q) \times \sigma(\lambda)] \Psi_q(q').$$

Смысл таких волновых функций состоит в том, что они описывают те же состояния, что и функции  $\Psi(q')$ , только по отношению к другой системе отсчета.

Существенно, что волновые функции  $\Psi_q(q')$  удовлетворяют тому же уравнению движения (2.4). Действительно, в уравнении движения фигурируют лишь левые сдвиги, тогда как функции  $\Psi_q$  получены с помощью правого сдвига. Все функции типа  $\Psi_q$  образуют линейное пространство — пространство состояний по отношению к произвольной системе отсчета, характеризуемой элементом  $q = \lambda p$ . Эта система отсчета отличается от той, что использовалась до сих пор тем, что вместо  $O$  в качестве опорной точки используется точка  $a = pO$ , а ориентация пространства Минковского (ортонормированный базис) изменен по отношению к первоначальному при помощи преобразования Лоренца  $\lambda$ .

Уточним определения и проанализируем их смысл. Прежде всего введем обозначение

$$\alpha_q(p') = \alpha(q^{-1}p'q)$$

для любого элемента  $q \in Q$ . Если  $q = \lambda p$ , то

$$\alpha_q(p') = \alpha_{\lambda p}(p') = [\alpha(p)]^{-1} \alpha(\lambda^{-1}p'\lambda)_a \alpha(p),$$

где обозначено  $a = pO$  и  $\alpha(p')_a$  — упорядоченная экспонента вдоль пути  $p''$ , начинающегося в точке  $a$ . Из этой формулы ясно, что  $\alpha_q(l)$  — представление группы петель.

Обозначим через  $\mathcal{H}_q$ ,  $q \in Q$  пространство функций  $\Psi_q(q')$ , заданных на группе  $Q$ , со значениями в пространстве  $\mathcal{L}_a \times \mathcal{L}_\sigma$ , удовлетворяющих уравнению движения

$$W(\delta)\Psi_q = 0 \quad (4.1)$$

и структурному условию

$$\Psi_q(\lambda q'l) = [\alpha_q(l^{-1}) \times \sigma(\lambda)] \Psi_q(q'). \quad (4.2)$$

Пространство  $\mathcal{H}_q$ ,  $q = \lambda p$ , соответствует системе отсчета, в которой в качестве начала отсчета вместо  $O$  выбрана точка  $a = pO$ , и ориентация пространства Минковского изменена с помощью лоренцевского поворота  $\lambda$ .

Действительно, выразим оператор  $\alpha(\lambda^{-1}p'\lambda)_a$  в виде упорядоченной экспоненты

$$\alpha(\lambda^{-1}p'\lambda)_a = P \exp \left\{ i \int_{[\lambda^{-1}\xi]_a} A_\mu(x) dx^\mu \right\},$$

где обозначено  $p' = [\xi]$ . Переходя к новой переменной интегрирования  $x' = \lambda(x - a)$ , нетрудно убедиться, что

$$\alpha(\lambda^{-1}p'\lambda)_a = P \exp \left\{ i \int_{p'} A_\mu(\lambda^{-1}x' + a) dx'^\mu \right\}.$$

Это значит, что представление  $l \mapsto \alpha(\lambda^{-1}l\lambda)_a$  получается из представления  $\alpha(l)$  заменой вектор-потенциала  $A_\mu(x)$  на  $A'_\mu(x) = A_\mu(\lambda^{-1}x + a)$ . Представление  $\alpha_q(l)$  получается далее преобразованием эквивалентности. Это как раз и означает, что пространство  $\mathcal{H}_q$  отличается от пространства  $\mathcal{H}_1$  тем, что поле и частицы описываются в нем по отношению к другой системе отсчета.



Определим оператор  $V(q_1)$ ,  $q_1 \in Q$ , действующий на векторы пространства  $\mathcal{H}_q$  правым сдвигом:

$$(V(q_1)\Psi_q)(q') = \Psi_q(q'q_1). \quad (4.3)$$

Непосредственно проверяется, что векторы, получаемые после действия этого оператора, удовлетворяют уравнению движения (4.1) и, кроме того, — структурному условию вида (4.2), в котором только вместо  $q$  фигурирует  $q_1q$ . Следовательно, можно заключить, что

$$V(q_1)\mathcal{H}_q = \mathcal{H}_{q_1q}.$$

Если теперь определить пространство

$$\mathcal{H} = \bigcup_{q \in Q} \mathcal{H}_q,$$

являющееся объединением (но не суммой) всех пространств  $\mathcal{H}_q$ , то это пространство остается инвариантным относительно действия операторов  $V(q_1)$ . Все эти операторы в совокупности образуют, очевидно, представление обобщенной группы Пуанкаре  $Q$ , а каждый в отдельности описывает переход к новой системе отсчета.

До сих пор мы пользовались волновыми функциями, заданными на группе  $Q$ . Перейдем теперь к локальным волновым функциям  $\psi_q(x)$ . Функции на группе подчиняются уравнению движения в форме (4.1). Сделаем так, чтобы локальные функции удовлетворяли уравнению

$$W(\nabla^{(q)})\psi_q = 0, \quad (4.4)$$

где  $\nabla^{(q)}$  — ковариантные производные, соответствующие калибровочному полю  $\alpha_q(l)$ . Для этого достаточно перейти к локальным функциям с помощью обычной процедуры:

$$\psi_q(x) = \alpha_q(x_p)\Psi_q(x_p),$$

где  $x_p$  — путь, ведущий из точки  $O$  в точку  $x$ . Если  $\Psi_q(q') = \Psi(q'q)$ ,  $q = \lambda p$ ,  $pO = a$ , то

$$\psi_{\lambda p}(x) = [\alpha(p^{-1})_{\lambda^{-1}(x+a)} \times \sigma(\lambda)]\psi(\lambda^{-1}(x+a)).$$

Таким образом, мы еще раз убеждаемся, что пространство  $\mathcal{H}_q$  отличается от пространства  $\mathcal{H}_1$  системой отсчета, т. е. изменением начала отсчета и ориентации пространства Минковского.

Зная закон преобразования функций на группе (4.3) и связь таких функций с локальными функциями, нетрудно найти закон преобразования локальных функций под действием обобщенной группы Пуанкаре. Разумеется, он оказывается гораздо более громоздким:

$$(V(\lambda_1 p_1)\psi_{\lambda p})(x) = [\alpha(p^{-1}\lambda^{-1}p_1^{-1}\lambda p)_{\lambda^{-1}(\lambda_1^{-1}x+a_1)} \times \sigma(\lambda_1)] \times \psi_{\lambda p}(\lambda_1^{-1}x + a_1), \quad (4.5)$$

где обозначено  $a=pO$ ,  $a_1=p_1O$ . В случае, если калибровочное поле равно нулю,  $\alpha(p) \equiv 1$ , эта формула переходит в обычный закон преобразования под действием группы Пуанкаре. Если  $p_1=1$ , то и в общем случае преобразование не отличается от преобразования для свободных частиц.

В частном случае однородного электромагнитного поля задача перехода в другую систему отсчета была решена в работе [114]. В этом случае представление  $V(Q)$  обобщенной группы Пуанкаре сводится к представлению конечнопараметрической группы — так называемой *группы Максвелла*. Поэтому задачу можно решить и без введения группы путей. Именно так она решена в работе [114].

## § 5. Решение уравнения движения с помощью интеграла по путям

Вернемся снова к формализму, введенному в § 1, где реальные состояния частиц описываются волновыми функциями, зависящими от путей или от точек и подчиненными уравнению движения. Целью данного параграфа будет выразить решения этих уравнений движения в виде интегралов по путям.

Рассмотрим простейшее уравнение движения — *уравнение Клейна—Гордона*:

$$(\square + m^2)\psi(x) = 0, \quad (5.1)$$

где  $\square$  — ковариантный даламбертиан

$$\square = \eta^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu = (\nabla, \nabla).$$

Легко видеть, что это уравнение можно свести к уравнению типа уравнения Шредингера, только в 4-мерном пространстве. Для этого рассмотрим функцию  $\psi_\tau(x)$ , зависящую не только от точки пространства Минковского, но и от пятого параметра  $\tau$ . Этот параметр называют по-разному: *собственным временем*, *параметрическим временем* или *историческим временем*. Мы будем называть его собственным временем, хотя это, видимо, не самый удачный термин. Формализм собственного времени восходит к Штюкельбергу и Фоку. Для целей регуляризации и устранения расходимостей он был использован Швингером и Де Виттом. Подчиним функцию  $\psi_\tau(x)$  уравнению типа уравнения Шредингера:

$$\left(-i \frac{\partial}{\partial \tau} + \square\right) \psi_\tau(x) = 0. \quad (5.2)$$

Тогда, требуя, чтобы эта функция зависела от собственного времени экспоненциально:

$$\psi_\tau(x) = e^{im^2\tau} \psi(x),$$

мы получим функцию  $\psi(x)$ , являющуюся решением уравнения Клейна — Гордона (5.1). Следовательно, вопрос сводится к нахождению решений уравнения (5.2).



Чтобы найти решения этого уравнения, вернее — выразить их в виде интегралов по путям, будем действовать формально, обращаясь иногда с операторами как с обычными числами. Все такие формальные операции можно обосновать, пользуясь спектральными разложениями операторов. Вместо этого можно убедиться в том, что конечный результат выкладок действительно дает решение. Мы не будем останавливаться на этих вопросах, так как они много раз обсуждались в литературе.

Решение уравнения (5.2) можно записать в виде

$$\psi_\tau(x) = K_\tau \varphi(x),$$

где

$$K_\tau = e^{-i\tau\Box} = e^{-i\tau(\nabla, \nabla)}. \quad (5.3)$$

Задача сводится, таким образом, к нахождению оператора  $K_\tau$ . Представим его в виде произведения

$$K_\tau = \lim_{N \rightarrow \infty} [e^{-i\Delta\tau(\nabla, \nabla)}]^N,$$

где обозначено  $\Delta\tau = \tau/N$ . Вот теперь с операторами в экспоненте можно обращаться как с обычными числами. Действительно, из-за малости параметра  $\Delta\tau$  в разложении экспоненты существенны лишь первые два члена, поэтому некоммутативность операторов не существенна.

Далее мы можем представить интересующую нас экспоненту в виде

$$e^{-i\Delta\tau(\nabla, \nabla)} = \int d^4k e^{i\Delta\tau(k, k)} \delta(k - i\nabla),$$

где  $k = \{k^\mu\}$  — 4-вектор, а интеграл берется по  $d^4k = dk^0 dk^1 dk^2 dk^3$ . Разлагая 4-мерную дельта-функцию в интеграл Фурье:

$$\delta(k - i\nabla) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4(\Delta\xi) e^{-i(\Delta\xi, k - i\nabla)},$$

получим

$$e^{-i\Delta\tau(\nabla, \nabla)} = \int d^4\left(\frac{k}{2\pi}\right) \int d^4(\Delta\xi) e^{i\Delta\tau(k, k) - i(k, \Delta\xi)} e^{-(\Delta\xi, \nabla)}.$$

Если теперь подставить это выражение в формулу для оператора  $K_\tau$ , то получится бесконечнократный интеграл, который и представляет собой *интеграл по путям*:

$$K_\tau = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N d^4\left(\frac{k_j}{2\pi}\right) d^4(\Delta\xi_j) \times \\ \times \exp \left\{ i \sum_{j=1}^N [\Delta\tau(k_j, k_j) - (k_j, \Delta\xi_j)] \right\} P \prod_{j=1}^N e^{-(\Delta\xi_j, \nabla)}. \quad (5.4')$$

В этом интеграле можно явно произвести интегрирования по переменным  $k_j$ , так как все эти интегралы относятся к гауссову типу.

В результате получим

$$K_{\tau} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{-i}{16\pi^2 \Delta \tau^2} \right)^N \int \prod_{j=1}^N d^4(\Delta \xi_j) \exp \left[ \frac{i}{4\Delta \tau} \sum_{j=1}^N (\Delta \xi_j, \Delta \xi_j) \right] P \prod_{j=1}^N e^{-(\Delta \xi_j, \nabla)}. \quad (5.4)$$

В символическом виде эти две формы интеграла по путям можно записать так:

$$K_{\tau} = \int d\{k\} \int d\{\xi\} \exp \left\{ i \int_0^{\tau} d\tau [(k, k) - (k, \xi)] \right\} U[\xi], \quad (5.5')$$

$$K_{\tau} = \int d\{\xi\} \exp \left\{ \frac{i}{4} \int_0^{\tau} d\tau (\dot{\xi}, \dot{\xi}) \right\} U[\xi]. \quad (5.5)$$

Здесь интегрирование ведется по кривым  $\{k(\tau') \mid 0 \leq \tau' \leq \tau\}$  и  $\{\xi(\tau') \mid 0 \leq \tau' \leq \tau\}$ , а через  $U[\xi]$  обозначена упорядоченная экспонента

$$U[\xi] = P \exp \left\{ - \int_{[\xi]} d\xi^{\mu} \nabla_{\mu} \right\}.$$

Ранее мы видели, что эта упорядоченная экспонента возникает как представление группы путей, действующее в пространстве локальных состояний частицы. Мы видим теперь, что это представление появляется в интеграле по путям и является единственным отличием интеграла по путям для частицы в калибровочном поле от интеграла по путям для свободной частицы.

Интеграл по путям (5.5) относится к тому типу интегралов, которые подробно обсуждались в гл. 2. Единственным отличием является то, что в гл. 2 рассматривались интегралы по путям с закрепленными концами, которые давали двухточечные функции. Сейчас же мы рассматриваем интеграл по свободным путям (или, если угодно, можно считать, что у них закреплен один конец), и в результате получается оператор. Если представить этот оператор как интегральный, то ядро интегрального оператора будет представлять собой двухточечную функцию и выражаться через интеграл по путям с закрепленными концами.

Предположим, что мы знаем оператор  $K_{\tau}$  и найдем с его помощью функцию  $\phi_{\tau} = K_{\tau} \varphi$ . Тогда эта функция (при любой  $\varphi$ ) является решением уравнения (5.2). Если эта функция достаточно быстро убывает при  $\tau \rightarrow \pm \infty$ , то ее преобразование Фурье (по параметру  $\tau$ )

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-im^2 \tau} \phi_{\tau}$$

удовлетворяет уравнению (5.1). Это значит, что преобразование



Фурье оператора  $K_\tau$

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-im^2\tau} K_\tau$$

является проектором на пространство решений уравнения (5.1). Это очевидно на формальном уровне. Точное же определение проектора должно включать характеристику его области определения. Если же нижний предел интегрирования положить равным нулю, то получается оператор

$$K^c = \int_0^{\infty} d\tau e^{-im^2\tau} K_\tau,$$

удовлетворяющий уравнению

$$(\square + m^2) K^c = -i\mathbb{1}.$$

Ядро этого оператора (если его представить как интегральный оператор) играет роль *причинной функции Грина* или *причинного пропагатора* в теории калибровочно заряженных частиц.

**З а м е ч а н и е.** Из формулы (5.5) видно, что групповое свойство представления  $U(p)$  (т. е. тот факт, что произведению путей соответствует произведение операторов, сопоставляемых этим путям) приводит к тому, что операторы  $K_\tau$  также обладают групповым свойством:  $K_\tau, K_{\tau'} = K_{\tau+\tau'}$ . Это позволяет вместо уравнения поля (5.1) наложить на волновые функции частиц условие

$$K_\tau \psi = e^{im^2\tau} \psi.$$

Это условие напоминает структурное условие, вводимое при определении индуцированного представления. Есть, однако, и существенная разница. Если структурное условие выражается через сдвиг аргумента определенным элементом группы, то обсуждаемое сейчас условие содержит сдвиги (оператор  $U(p)$  — не что иное, как сдвиг аргумента) с помощью всевозможных элементов группы, усредненное с некоторым весом. Вес определяется мерой в пространстве путей.

С уравнением Дирака (или, в более общем случае, уравнением Гельфанда — Яглома)

$$(i\gamma^\mu \nabla_\mu - m) \psi(x) = 0 \quad (5.6)$$

дело обстоит сложнее. Процедура, аналогичная только что проведенной, не приводит в этом случае к интегралу по путям, по крайней мере к интегралу по путям обычного вида (когда мера интегрирования содержит экспоненту от квадратичной формы). По-видимому, для получения интеграла по путям для уравнения Дирака следует обратиться к *квадрированному уравнению*. Умножив оператор Дирака на сопряженный ему, получим

$$(-i\gamma^\mu \nabla_\mu + m)(i\gamma^\nu \nabla_\nu + m) = \square - \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + m^2,$$

где  $F_{\mu\nu}$  — напряженность калибровочного поля, а

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu].$$

Поэтому, если  $\varphi(x)$  — решение уравнения

$$(\square - \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + m^2) \varphi(x) = 0, \quad (5.7)$$

то функция

$$\psi(x) = (i\gamma^\mu \nabla_\mu + m) \varphi(x)$$

является решением уравнения Дирака. Следовательно, задача может быть сведена к решению квадрированного уравнения Дирака (5.7). Решение квадрированного уравнения уже может быть получено в виде интеграла по путям.

И все же переход к квадрированному уравнению во многих отношениях кажется неудовлетворительным. В то же время выкладки, аналогичные проведенным выше для уравнения Клейна — Гордона, дают для решений уравнения Дирака формальные выражения, которые кажутся красивыми, но которым трудно придать точный математический смысл. Мы приведем здесь лишь конечные результаты.

Решение  $\psi(x)$  уравнения Дирака (5.6) связано с решением  $\psi_\tau(x)$  уравнения

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma^\mu \nabla_\mu \right) \psi_\tau(x) = 0$$

формулой  $\psi_\tau = \exp(im\tau) \psi$ . Решение  $\psi_\tau$  выражается через произвольную функцию  $\varphi(x)$  в виде  $\psi_\tau = K_\tau \varphi$ , где  $K_\tau = \exp(-\tau \gamma^\mu \nabla_\mu)$ . Для этого оператора можно вывести формальное выражение в виде интеграла по путям

$$K_\tau = \int d\{k\} \int d\{\xi\} P \exp i \int_0^\tau d\tau (\gamma - \xi, k) U[\xi],$$

где мера интегрирования определена так же, как и выше. Беда с этим интегралом, однако, в том, что он расходится даже при  $N$ -кратной аппроксимации. Но внимательный анализ показывает, что при правильном порядке интегрирования (сначала по координатам, потом по импульсам) в  $N$ -кратной аппроксимации расходится лишь один, последний интеграл. Поэтому можно надеяться, что формальному выражению для причинного пропагатора

$$K^c = \int_0^\infty d\tau e^{-im\tau} K_\tau = \int d\{k\} \int d\{\xi\} \int d\tau e^{-im\tau} P \exp i \int_0^\tau d\tau (\gamma - \xi, k) U[\xi]$$

можно придать смысл.

**З а м е ч а н и е.** Интеграл по путям может быть получен и в рамках теоретико-группового подхода. Для этого следует



от путей  $\{\xi\}$ , как они были определены в гл. 6, перейти к параметризованным путям  $\{\xi\}$ , т. е. различать между собой кривые, отличающиеся параметризацией (другие отождествления следует сохранить). Параметризованные пути, как можно показать, образуют полугруппу. Она расширяется до полугруппы, напоминающей *группу Галилея*, только роль времени играет собственное время  $\tau$ , а вместо 3-мерного пространства фигурирует 4-мерное пространство-время. Если построить теоретико-групповую схему, подобную той, на основе которой в книге [37] была сформулирована нерелятивистская квантовая механика, используя, однако, вместо группы Галилея *обобщенную полугруппу Галилея*, то в полученной схеме естественно возникают интегралы по путям. В рамках такого подхода можно, вероятно, получить более глубокую (теоретико-групповую) интерпретацию самого понятия интеграла по путям.

## § 6. Перспективы дальнейшего развития теории

Все изложенное до сих пор с несомненностью доказывает, что группа путей является естественным инструментом для описания частиц, движущихся в калибровочных полях. Позднее будет показано, что частицы, движущиеся в гравитационном поле, также могут быть описаны с помощью группы путей (причем той же самой группы путей на пространстве Минковского). По большей части мы излагали на языке группы путей теорию частиц, которая в принципе может быть сформулирована и без этого аппарата (исключением является теория калибровочного монополя и диона, которая существенно зависит от путей). Тем не менее даже в этой теории группа путей меняет точку зрения и приводит к некоторым качественно новым выводам. Все это указывает на правомерность вопроса: какова более глубокая, неформальная, физическая сущность группы путей и не вносит ли группа путей принципиально новые возможности в теорию калибровочно заряженных частиц. Рассмотрим этот вопрос по крайней мере качественно.

Какие выводы о физическом смысле группы путей и путе-зависимого формализма можно сделать уже сейчас? Мы видели, что частицы можно описывать функциями, зависящими от путей. Пространство-время при этом явно не фигурирует. Правда, в тех простых случаях, которые были рассмотрены, структуру пространства-времени и его геометрию можно восстановить, пользуясь структурными условиями на волновые функции. Однако это лишь до тех пор, пока калибровочное поле рассматривается как классическое. Стоит проквантовать его, и геометрия пространства-времени становится неопределенной. В дальнейшем, при рассмотрении гравитации, мы увидим, что и метрическая структура пространства-времени, и даже его топология может быть выражена на языке функций, зависящих от путей. При этом квантование гравитационного поля приведет к тому, что даже структура пространственно-временного многообразия (не говоря

о его метрической и калибровочной структуре) перестанет существовать как таковая. Останутся лишь функции на группе путей и их свойства. Таким образом, *группа путей позволяет отказаться от понятия пространственно-временного многообразия*, понятия, которое во многом связывает руки при квантовании гравитации и особенно при учете квантовых свойств топологии.

С другой стороны, мы видели, что группа путей выявляет интереснейшую картину: локальные свойства частицы описываются, оказывается, калибровочным полем или, что то же, представлением группы петель. Частица, не выходя из единственной точки пространства-времени, как бы прощупывает с помощью петель все пространство-время и учитывает его геометрию. Таким образом, *в формализме путей неразрывно переплетаются локальные и глобальные свойства частицы*. В этом смысле формализм путей универсален, он является естественным для описания тех и других свойств.

Сказанное позволяет предположить, что с помощью группы путей можно будет исследовать связь между локальным и глобальным аспектами квантовой теории более глубоко, чем это в принципе позволяет обычный формализм. Хотя вряд ли сейчас можно предсказать в деталях, как именно реализуется (если вообще реализуется) эта возможность, тем не менее можно думать, что в теории может существовать некоторый параметр или масштаб, при достижении которого глобальные и локальные аспекты теории начинают существенно интерферировать. Первое, что приходит в голову относительно природы этого параметра, — это отождествление его с *фундаментальной длиной*. Однако даже если это параметр размерности длины, он может входить в теорию по-разному. Три простейших варианта состоят в следующем: 1) Структурное условие, накладываемое на волновую функцию, (2.6), выполняется лишь для петель, имеющих диаметр менее некоторой фиксированной длины  $\lambda_1$ . 2) Интеграл по путям (5.5), определяющий волновую функцию, берется лишь по путям, лежащим в коридоре шириной  $\lambda_2$ . 3) Везде, где до сих пор фигурировал путь, на самом деле должен фигурировать интеграл по узкому коридору путей шириной  $\lambda_0$ . Первые два варианта модифицировали бы теорию в *инфракрасной* области (большие расстояния, малые энергии и импульсы), а третий вариант — в *ультрафиолетовой* области (малые расстояния, большие энергии и импульсы).

Рассмотрим подробнее третий вариант, поскольку здесь мы можем опираться на результаты, полученные в части I книги. Итак, мы предполагаем, что каждый путь несколько размывается, происходит усреднение по всем путям, лежащим достаточно близко к нему. Что при этом произойдет? Если ширина коридора усреднения мала по сравнению с другими характерными для задачи параметрами, то никакого изменения не будет. Это обеспечивает возможность вывести обычную теорию как приближение из теории с фундаментальной длиной и определить, в каких пределах это приближение справедливо. Однако если параметры задачи



сравнимы с шириной коридора, то теория существенно модифицируется. Следовательно, фундаментальная длина даст поправки к обычной теории на масштабах, сравнимых с фундаментальной длиной.

В части I задача ставилась конкретно, применительно к нерелятивистской квантовой механике. Сейчас же, когда мы говорим об интегрировании по коридору путей, мы не можем еще сказать, по какой мере должно происходить интегрирование, не можем уточнить задачу и в других отношениях. Тем не менее можно попытаться сделать какие-то общие выводы, основываясь на прямой аналогии. Для этого отождествим время измерения, которое фигурировало в части I, с собственным временем  $\tau$ , которое было введено в предыдущем параграфе. Вспомним, что в окончательных формулах для разброса результатов измерения время измерения всегда оказывалось в знаменателе. Это значит, что для достаточно больших значений параметра  $\tau$  ширина коридора становится несущественной. В этом случае усреднение по коридору не вносит существенных изменений в амплитуды вероятности, и можно действовать так, будто амплитуда вероятности сопоставляется не коридору путей, а индивидуальному пути. Таким образом, для больших  $\tau$  теория не меняется. С другой стороны, для малых  $\tau$  она существенно модифицируется.

В связи с этим уместно вспомнить, что Швингер ввел собственное время для регуляризации интегралов, возникающих при вычислении амплитуд [10]. При этом регуляризация производится исключением значений  $\tau$ , близких к нулю. Это значит, что бесконечности связаны именно с малыми значениями  $\tau$ . Можно надеяться, что модификация теории при малых  $\tau$ , возникающая за счет введения коридоров вместо индивидуальных путей, также приведет к ликвидации расходимостей.

При усреднении по коридорам происходит следующее. В интеграле по путям (5.5) фигурируют на самом деле не индивидуальные пути, а коридоры путей. В этом случае фигурирующий в интеграле путь (или траектория)  $\{\xi\}$  на самом деле лишь показывает, как проходит траектория, лежащая в середине коридора. А вместо  $U[\xi]$  следует подставить величину, которая получается из  $U[\xi']$  усреднением по коридору. При этом если  $\tau$  велико, то усреднение  $U[\xi']$  по коридору траекторий дает величину, близкую к значению  $U[\xi]$  для центра коридора. Если же  $\tau$  мало, то усреднение дает величину, сильно отличающуюся от  $U[\xi]$ . Поэтому оператор  $K_\tau$  остается неизменным при больших  $\tau$  и меняется при малых  $\tau$ .

В части I книги было показано, что измерение пути с конечной точностью, описываемое интегрированием по коридору путей, является глобальной процедурой. Это означает, что происходящий при этом процесс не может быть описан дифференциальным уравнением типа уравнения Шредингера. Он корректно описывается лишь глобальной процедурой интегрирования по коридору путей. Следовательно, при той модификации квантовой теории поля, которая сейчас обсуждается, теория остается локальной

лишь при больших значениях собственного времени  $\tau$ . При малых же значениях теория перестает быть локальной. Понятие точки как бы исчезает. Вместо этого фигурируют только коридоры путей, которые не могут быть сведены к индивидуальным путям и, следовательно, к точкам.

Такая модификация представляет собой своего рода *квантование пространства-времени* \*). Пространственно-временное многообразие сохраняет свой смысл лишь при описании распространения частиц на большие интервалы собственного времени. При распространении же на малые интервалы собственного времени понятие пространственно-временного многообразия становится некорректным и описание частицы происходит в терминах коридоров путей — существенно нелокальных объектов. Не подлежит сомнению, что такого рода «квантование» геометрии приведет к сглаживанию пропагатора на малых расстояниях и к исчезновению по крайней мере некоторых расходимостей квантовой теории поля.

Нетрудно было бы сформулировать конкретную модель такого рода теории. Для этого достаточно лишь зафиксировать меру, с помощью которой происходит усреднение по коридорам траекторий. Однако такая конкретизация кажется пока преждевременной, и мы ограничиваемся лишь формулировкой общей идеи.

Рассмотренная гипотеза в принципе могла быть сформулирована и ранее, без всякой группы путей. Однако по-видимому лишь в последние годы становится очевидным, что формализм путей является не случайным математическим приемом, но неотъемлемой органической частью теории частиц. Аппарат группы путей усиливает это впечатление. Именно поэтому естественно возникает мысль, что многие физические проблемы следует формулировать непосредственно на языке путей.

Кроме гипотезы об усреднении по коридорам напрашивается много других предложений. Некоторые давно стоящие в физике проблемы по всей видимости могут быть существенно прояснены, если сформулировать их непосредственно в терминах путей. Среди них прежде всего следует назвать проблему *рождения пар из вакуума*, в которой до сих пор остаются неясными принципиальные моменты. Еще одним примером является *нарушение симметрии*, которое за счет группы путей получает новое освещение. Действительно, если некоторые компоненты калибровочного поля по тем или иным причинам в данной области равны нулю, то соответствующие им генераторы калибровочной группы вообще не появляются при описании частицы, т. е. калибровочная группа редуцируется до своей подгруппы. В сущности примером такого нарушения симметрии является превращение кварков в лептоны при выходе их на свободу из плена конфайнмента (см. гл. 8, § 7).

---

\*) Имеются другие варианты «квантования пространства-времени», приводящие к фундаментальной длине и устранению расходимостей; см., например, [115].



Разумеется, в этом параграфе больше поставлено вопросов, чем решено. Но именно такова была цель. По нашему мнению, формализм путей нуждается в дальнейшей разработке, и его приложения могут дать много неожиданных выводов.

## Глава 10

### ГРУППА ПУТЕЙ В ГРАВИТАЦИИ

Мы подробно проанализировали теорию частиц в калибровочном поле с точки зрения группы путей и обобщенной группы Пуанкаре. Теперь рассмотрим в рамках этого подхода частицы, движущиеся в гравитационном поле. Самым важным фактом, который обнаруживается при таком рассмотрении, является то, что группа путей и обобщенная группа Пуанкаре при этом не меняются. Конечно, поскольку в гравитации рассматривается искривленное пространство-время, то имеет смысл использовать группойд путей на этом искривленном многообразии. Такой группойд для многих целей бывает полезен. Однако важным и до некоторой степени неожиданным является то, что в гравитации можно применять ту же самую группу путей в пространстве Минковского, которая фигурировала до сих пор. При этом само пространство Минковского уже не является, конечно, физическим пространством-временем. Теперь это лишь вспомогательное пространство, используемое для характеристики элементов группы (путей). Геометрически его можно интерпретировать как пространство, являющееся точной копией каждого из (аффинных) касательных пространств к физическому пространству-времени.

Многие физики, занимавшиеся гравитацией, пытались ввести наряду с искривленным пространством-временем еще пространство Минковского. Одной из причин этого является стремление сделать теорию гравитационного поля похожей на теорию других полей. Возможно, та же причина привела к появлению путезависимого формализма Мандельштама. Во всяком случае это справедливо в отношении его теоретико-групповой версии, излагаемой здесь. Путезависимый формализм возникает при попытке установить между искривленным и плоским пространствами геометрически естественное соответствие [168]. Плоское пространство можно отождествить с касательным пространством к искривленному многообразию. Естественным образом отобразить все это многообразие (или любую его 4-мерную область) на касательное пространство оказывается невозможным. Однако любая кривая в искривленном многообразии, начинающаяся в точке касания, естественным образом отображается на кривую в касательном пространстве. В математике это отображение называется разверткой кривой. Наглядный образ этого отображения можно получить, если представить себе, что касательная плоскость перекачивается по искривленной поверхности так, что точка касания перемещается вдоль заданной кривой. Наличие естествен-

ного способа отображать кривые в искривленном пространстве в кривые в плоском пространстве приводит к путезависимому формализму: не имея возможности отображать точки, мы отображаем кривые и переходим к функциям, зависящим от кривых, а точнее — от путей. Зато теперь это пути в плоском пространстве.

Одним из результатов, которые непосредственно вытекают из путезависимого формализма, является способ интегрирования по путям в искривленном пространстве, который сводит этот процесс к интегрированию по путям в плоском пространстве. Кроме гравитационного поля может быть отлично от нуля еще и калибровочное поле. Способ интегрирования по путям по существу остается прежним, меняется лишь представление группы путей, стоящее под знаком интеграла.

## § 1. Расслоение реперов над искривленным пространством-временем

При построении теории частиц в калибровочном поле мы начинали с построения представления группы петель (потому что эта подгруппа оказалась стабилизатором точки пространства Минковского), затем индуцировали это представление на группу всех путей и наконец переходили к обобщенной группе Пуанкаре. Аналогичным образом можно было бы строить теорию частиц в гравитационном поле, т. е. в искривленном пространстве-времени. Разумеется, начинать в этом случае нужно не с группы петель, а с другой подгруппы, играющей роль стабилизатора точки. Само искривленное пространство-время получилось бы как фактор-пространство по этой подгруппе. Однако в целях наглядности мы будем действовать иначе. Опишем искривленное пространство обычными, традиционными методами, найдем, как действует в нем группа путей и обобщенная группа Пуанкаре и уже потом перейдем к полностью теоретико-групповому формализму. После этого будет очевидно, как можно использовать этот формализм для того, чтобы выйти за рамки обычной геометрической картины. Результатом будет возможность ввести некоторое обобщение римановой геометрии, которое может играть роль в квантовой гравитации.

В теории гравитации предполагается, что пространство-время  $\mathcal{X}$  — это 4-мерное *псевдориманово пространство* сигнатуры (1, 3). Это значит, что  $\mathcal{X}$  — дифференцируемое многообразие, для любых двух бесконечно близких точек которого  $x$  и  $x+dx$  определен интервал

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu,$$

причем *метрический тензор*  $g_{\mu\nu}(x)$  в любой точке может быть преобразованием системы отсчета сделан равным тензору Минковского  $\eta_{\mu\nu}$ . Важную роль в теории играют так называемые



коэффициенты связности или *символы Кристоффеля*

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(x) = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}), \quad (1.1)$$

где  $[g^{\mu\nu}]$  — матрица, обратная по отношению к матрице  $[g_{\mu\nu}]$ .

По символам Кристоффеля определяются *ковариантные производные* от тензоров любой размерности:

$$\begin{aligned} \nabla_{\nu} A^{\lambda} &= A^{\lambda}_{,\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} A^{\mu}, \\ \nabla_{\nu} A_{\mu} &= A_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} A_{\lambda}, \\ \nabla_{\mu} A_{\sigma_1\sigma_2}^{\nu_1\nu_2} &= A_{\sigma_1\sigma_2,\mu}^{\nu_1\nu_2} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu_1} A_{\sigma_1\sigma_2}^{\lambda\nu_2} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu_2} A_{\sigma_1\sigma_2}^{\nu_1\lambda} + \dots \\ &\quad \dots - \Gamma_{\sigma_1\mu}^{\lambda} A_{\lambda\sigma_2}^{\nu_1\nu_2} - \Gamma_{\sigma_2\mu}^{\lambda} A_{\sigma_1\lambda}^{\nu_1\nu_2} - \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

После ковариантного дифференцирования тензор остается тензором, только на единицу большего ранга (это значит, что он тензорным образом преобразуется при изменении системы координат). Ковариантные производные от спиноров определяются более сложным образом. Мы не будем приводить это определение, так как несколько позднее дадим определение, одинаково пригодное для тензоров и спиноров.

Тензорные поля и ковариантные производные составляют классический аппарат дифференциальной геометрии, которым долгие годы пользовались в гравитации. В последнее десятилетие, однако, распространился другой математический язык — аппарат расслоенных пространств. Мы изложим здесь кратко некоторые его аспекты, которые нам впоследствии понадобятся. Понятие *расслоенного пространства* было уже введено в гл. 5. Сейчас мы лишь конкретизируем расслоение применительно к описанию гравитационного поля.

Рассмотрим произвольную точку  $x \in \mathcal{X}$  и *касательный вектор* в этой точке  $A = A^{\mu} \partial / \partial x^{\mu}$ . Числа  $A^{\mu}$  представляют собой компоненты вектора в данной системе координат, а свертка их с градиентом представляет собой символическое обозначение вектора как объекта, не зависящего от выбора системы координат. Впрочем, эту свертку  $A$  можно понимать и как оператор дифференцирования в данной точке по данному направлению, чем мы и будем пользоваться. Все векторы в данной точке образуют 4-мерное линейное пространство  $T_x$ . Метрический тензор  $g_{\mu\nu}(x)$  задает билинейную форму в  $T_x$ :

$$(A, B) = g_{\mu\nu}(x) A^{\mu} B^{\nu}.$$

Выберем в *касательном пространстве*  $T_x$  некоторый базис или репер  $b = \{b_{\alpha} \in T_x \mid \alpha = 0, 1, 2, 3\}$ . Любые два базиса  $b, b'$  связаны друг с другом невырожденным линейным преобразованием  $b' = bg$  или, более детально,

$$b'_{\alpha} = b_{\beta} g^{\beta}_{\alpha}. \quad (1.3)$$

Здесь  $g \in GL(4)$  — элемент группы 4-рядных невырожденных

матриц. Если произвольно выбрать один базис, то все остальные базисы находятся с помощью всевозможных преобразований из группы  $G=GL(4)$ , причем таким образом устанавливается взаимно-однозначное соответствие между множеством базисов  $\mathcal{B}_x$  и группой  $G$ . С другой стороны, формула (1.3) задает действие группы  $G$  на множестве базисов  $\mathcal{B}_x$ .

Тем самым мы фактически ввели *главное расслоенное пространство* над  $\mathcal{X}$ . Действительно, если рассмотреть все точки  $x \in \mathcal{X}$ , в каждой построить касательное пространство  $T_x$  и в нем рассмотреть всевозможные базисы  $b \in \mathcal{B}_x$ , то множество  $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{B}_x$  все-

возможных базисов во всевозможных точках образует расслоенное пространство над  $\mathcal{X}$ . Будем называть его *расслоением базисов* или *реперов*. Каноническая проекция этого расслоения  $\pi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{X}$  переводит репер  $b \in \mathcal{B}_x$  в точку  $x$ , а *структурной группой* в расслоении служит группа  $G=GL(4)$ .

Координатами в расслоении могут служить координаты точек и компоненты реперов. Пусть репер  $b \in \mathcal{B}_x$  состоит из векторов  $b_\alpha$ ,  $\alpha=0, 1, 2, 3$ . Если выбрать некоторую систему координат, то точке  $x$  сопоставляется набор координат  $x^\mu$ ,  $\mu=0, 1, 2, 3$ , а каждому вектору  $b_\alpha$  — набор его компонент  $b_\alpha^\mu$ ,  $\mu=0, 1, 2, 3$ . Тогда реперу  $b$  можно сопоставить набор чисел  $\{x^\mu, b_\alpha^\nu\}$ . Это сопоставление вводит в расслоении  $\mathcal{B}$  систему координат. Таким образом, расслоение реперов является 20-мерным многообразием. Каждому векторному полю в этом многообразии можно сопоставить дифференциальный оператор

$$A = A^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + A_\alpha^\nu \frac{\partial}{\partial b_\alpha^\nu}.$$

Теперь введем связность в расслоении  $\mathcal{B}$ . Как мы видели в главе 5, связность (т. е. понятие горизонтальных векторов в расслоении) задается набором векторных полей, которые должны быть определенным образом согласованы с действием структурной группы. Можно показать, что в расслоении  $\mathcal{B}$  произвольная *связность* задается набором так называемых *базисных векторных полей*  $B_\alpha$ ,  $\alpha=0, 1, 2, 3$ ,

$$B_\alpha = b_\alpha^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) b_\alpha^\mu b_\beta^\nu \frac{\partial}{\partial b_\beta^\lambda}, \quad (1.4)$$

где  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x)$  — произвольные функции от  $x$ , называемые *коэффициентами связности*. Если эти функции зафиксированы, то зафиксированы базисные векторные поля, а любое горизонтальное векторное поле можно получить как линейную комбинацию базисных полей (коэффициенты этой линейной комбинации являются функциями на расслоении).

До сих пор мы использовали лишь структуру дифференцируемого многообразия на  $\mathcal{X}$ . Вспомним теперь, что на  $\mathcal{X}$ , кроме того, задана псевдориманова метрика. Для нас важно, что эта метрика в каждом касательном пространстве  $T_x$  определяет билинейную



форму  $(A, B)$ . Потребуем, чтобы базисные векторы были ортонормированными относительно этой формы. В силу того, что метрика имеет сигнатуру  $(1, 3)$ , мы не можем нормировать все базисные векторы на единицу. Вместо этого один из них будет нормирован на единицу, а остальные три — на  $(-1)$ . Другими словами, мы определим *ортонормированный репер*, или *орторефер*,  $n \in \mathcal{R}_x$  как совокупность векторов  $n = \{n_\alpha \in T_x\}$ , удовлетворяющих условию

$$(n_\alpha, n_\beta) = g_{\mu\nu}(x) n_\alpha^\mu n_\beta^\nu = \eta_{\alpha\beta}.$$

Обозначим подмножество всех ортореперов в  $\mathcal{R}_x$  через  $\mathcal{N}_x$ . Объединение всех таких подмножеств образует расслоение  $\mathcal{N}$  над  $\mathcal{X}$ . Оно также является *главным расслоенным многообразием*, только *структурной группой* в нем служит группа Лоренца  $L = SO(1, 3) \subset GL(4)$ . Действительно, преобразование вида (1.3), совершенное с помощью элемента группы Лоренца, переводит ортонормированный репер в ортонормированный, и обратно, любые два ортонормированные репера связаны преобразованием Лоренца. Координаты в расслоении  $\mathcal{N}$  ввести непосредственно трудно, и это является главной причиной, по которой мы вынуждены были сначала определить более широкое расслоение  $\mathcal{R}$ , а потом уже определить  $\mathcal{N}$  как подмногообразие в нем, выделенное условием нормировки реперов.

Векторные поля (1.4), вообще говоря, нельзя рассматривать как векторные поля в  $\mathcal{N}$ . Действительно, если мы из произвольной точки  $n \in \mathcal{N}$  сдвинемся вдоль векторного поля  $B_\alpha$ , то, вообще говоря, попадем в точку, уже не принадлежащую  $\mathcal{N}$  (нормировка репера нарушится). Однако при подходящем выборе коэффициентов связности  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x)$  этого не происходит, сдвиг вдоль горизонтальных полей  $B_\alpha$  не меняет нормировку, т. е. не выводит из подрасслоения  $\mathcal{N}$ . В этом случае можно считать, что поля  $B_\alpha$  задают *связность* не только в  $\mathcal{R}$ , но и в  $\mathcal{N}$ . Обычно на связность накладывают еще одно дополнительное условие  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$  (это условие означает, что *кручение* связности равно нулю, но мы не будем вводить этого понятия). Два условия — симметричность связности и сохранение нормировки при горизонтальном сдвиге — определяют коэффициенты связности однозначно. При этом они оказываются равными *символам Кристоффеля* (1.1). Связность с такими коэффициентами называется *римановой связностью* или *связностью Леви-Чивита*. Мы всегда далее будем пользоваться только такой связностью.

Мы видим, как в формализме расслоения реперов появляются коэффициенты связности. Ясно, что вместе с ними должны появиться в этом формализме и ковариантные производные. Нетрудно догадаться, что роль ковариантных производных должны играть дифференциальные операторы (1.4), соответствующие базисным векторным полям в расслоении. Мы убедимся в этом в следующем параграфе.

## § 2. Волновые функции на расслоении реперов

В предыдущем параграфе было определено расслоение реперов (базисов касательных пространств)  $\mathcal{R}$  над искривленным пространством-временем  $\mathcal{X}$ . Координатами в этом расслоении могут служить координаты точек и компоненты векторов репера,  $b = \{x^\mu, b_\alpha^\nu\}$ . В этих координатах так называемые базисные векторные поля в  $\mathcal{R}$  выглядят следующим образом:

$$B_\alpha = b_\alpha^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) b_\beta^\nu \frac{\partial}{\partial b_\lambda^\beta} \right),$$

где  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  — коэффициенты связности.

Геометрический смысл базисных полей состоит в следующем. Если  $b$  — произвольная точка расслоения  $\mathcal{R}$  и  $B_\alpha|_b$  — вектор в  $\mathcal{R}$ , равный значению поля  $B_\alpha$  в точке  $b$ , то проекция этого вектора на базу расслоения  $\mathcal{X}$  дает в точности базисный вектор  $b_\alpha$ . Другими словами, базисное векторное поле получается горизонтальным подъемом (лифтом) базисных векторов в расслоение.

Любая линейная комбинация базисных полей (коэффициентами которой являются функции на  $\mathcal{R}$ ) по определению считается горизонтальным векторным полем. Тем самым на расслоении  $\mathcal{R}$  задается связность. Если коэффициенты связности выбраны так, что сдвиг в горизонтальном направлении не меняет нормировку репера, то векторные поля  $B_\alpha$  можно ограничить на подрасслоение  $\mathcal{N} \subset \mathcal{R}$  ортонормированных реперов. Это имеет место, в частности, если коэффициенты связности совпадают с символами Кристоффеля (1.1), что мы и будем всегда предполагать. В этом случае базисные поля  $B_\alpha$  задают связность не только на  $\mathcal{R}$ , но и в  $\mathcal{N}$ . Для физических приложений требуется только расслоение  $\mathcal{N}$  и связность в нем. Расслоение  $\mathcal{R}$  вводится как вспомогательное, в частности, потому, что в нем можно простым образом ввести координаты и задать базисные поля.

Теперь мы перейдем к описанию волновых функций и частиц в формализме расслоения реперов. Частица, кроме всего прочего, характеризуется некоторым представлением  $\sigma(\Lambda)$  группы Лоренца. Обычно состояние частицы описывают функцией на пространстве-времени, однако часто бывает удобно перейти к функциям на некотором расслоении, наложив на эти функции подходящие структурные условия. Мы уже встречались с таким приемом в этой книге. Теперь также будем описывать частицы функциями на расслоении  $\mathcal{N}$ . Значения такой функции лежат в пространстве\*)  $\mathcal{L}_\sigma$  (носитель представления  $\sigma(\Lambda)$ ). Чтобы с переходом к расслоению не появлялись новые степени свободы, на функцию следует наложить *структурное условие*

$$\psi(n\lambda) = \sigma(\lambda^{-1}) \psi(n). \quad (2.1)$$

\*) Если частица обладает внутренними степенями свободы, то значения ее волновой функции лежат в пространстве  $\mathcal{L}_\sigma \times \mathcal{L}_\sigma$ , где  $\mathcal{L}_\sigma$  — пространство внутренних степеней свободы (например, зарядовое). Но пока для нас внутренние степени свободы будут несущественными.



Здесь  $n \in \mathcal{N}$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , а  $n\lambda = n'$  определяется как действие структурной группы (группы Лоренца) на расслоении. В данном случае это значит, что  $n'_\alpha = n_\beta \lambda_\alpha^\beta$ , т. е. происходит поворот репера с помощью преобразования Лоренца.

Поскольку в нашем распоряжении теперь имеется функция на расслоении  $\mathcal{N}$ , мы можем на нее подействовать оператором  $B_\alpha$ . Это действие эквивалентно ковариантному дифференцированию волновой функции. При этом ковариантное дифференцирование определяется единообразно для любых тензоров, спиноров или тензор-спиноров. Тензорные свойства поля  $\psi$  определяются заданием представления  $\sigma(\Lambda)$  и наложением структурного условия (2.1). Сам же оператор ковариантного дифференцирования  $B_\alpha$  имеет один и тот же вид, независимо от тензорной структуры той функции, на которую он действует. Более того, он является дифференциальным оператором (правда, в пространстве более высокой размерности) и не имеет добавочных членов, зависящих от тензорной размерности, как в формуле для обычной ковариантной производной (1.2). Во многих случаях это очень удобно.

Покажем, как связан оператор  $B_\alpha$  с обычной ковариантной производной, на примере дифференцирования векторного поля. Пусть  $A_\mu(x)$  — векторное поле на пространстве  $\mathcal{X}$ . Ковариантную производную его можно определить по формуле (1.2). Чтобы применить операторы  $B_\alpha$ , нужно перейти сначала к функции на расслоении, удовлетворяющей структурному условию (2.1). Сделаем это по формуле

$$\psi_\alpha(b) = \psi_\alpha(x^\mu, b_\beta) = b_\alpha^\mu A_\mu(x).$$

Значение функции  $\psi(b)$  есть 4-вектор, компоненты которого нумеруются индексом  $\alpha$ , а вместо репера  $b$  мы явно ввели его координаты  $x^\mu, b_\beta$ . Нетрудно убедиться непосредственно, что определенная так функция удовлетворяет структурному условию

$$\psi_\alpha(b\lambda) = \lambda_\alpha^\beta \psi_\beta(b).$$

Значит, тем более для функции  $\psi_\alpha(n)$  (ограниченной на подрасслоение  $\mathcal{N}$ ) выполняется структурное условие (2.1), в котором представление следует выбрать как  $\sigma(\lambda) = (\lambda^{-1})^T$  (значок  $T$  означает транспонирование). Так и должно быть, потому что 4-векторы с нижними (опущенными) индексами преобразуются при действии группы Лоренца именно по такому представлению. Раз мы построили функцию  $\psi(n)$  с нужными свойствами (и даже расширение этой функции  $\psi(b)$ ), то на нее можно действовать оператором  $B_\alpha$ . Непосредственное вычисление дает

$$B_\alpha \psi_\gamma(b) = B_\alpha b_\gamma^\sigma A_\sigma(x) = b_\alpha^\mu b_\gamma^\sigma (\nabla_\mu A_\sigma).$$

Таким образом, действие оператора  $B_\alpha$  на функцию  $\psi_\gamma(b)$  сводится к действию оператора  $\nabla_\mu$  (определенного формулой (1.2)) на функцию  $A_\sigma(x)$ . После дифференцирования вместо векторной функции на  $\mathcal{X}$  возникает тензорная функция с тензорными индексами  $\alpha, \gamma$ , удовлетворяющая условию типа (2.1), но уже с тензорным представлением группы Лоренца.

То же самое имеет место для тензоров любой размерности. Например, если дано векторное поле  $A^\mu(x)$  (с верхним индексом), то соответствующая функция на расслоении строится как  $\psi^\alpha(b) = b^{-1}{}^\alpha{}_\mu A^\mu(x)$ , удовлетворяет структурному условию

$$\psi^\alpha(b\lambda) = \lambda^{-1}{}^\alpha{}_\beta \psi^\beta(b)$$

(т. е. в этом случае  $\sigma(\lambda) = \lambda$ ) и дифференцируется

$$B_\alpha \psi(b) = B_\alpha b^{-1\gamma}_\sigma A^\sigma(x) = b^\mu_\alpha b^{-1\gamma}_\sigma (\nabla_\mu A^\sigma).$$

Для вывода этой формулы нужно только помнить, что обратная матрица  $b^{-1}$  дифференцируется по правилу

$$\frac{\partial}{\partial b^\beta_\gamma} b^{-1\gamma}_\sigma = -b^{-1\gamma}_\lambda b^{-1\beta}_\sigma.$$

Точная связь операторов  $B_\alpha$  с ковариантными производными  $\nabla_\mu$  в формализме расслоения оказывается ненужной. Если пользоваться функциями на расслоении  $\psi(n)$ , то для них операторы  $B_\alpha$  играют роль ковариантных производных. Например, если мы хотим записать ковариантное уравнение движения, то следует взять уравнение движения для свободных частиц и заменить в нем все производные на операторы  $B_\alpha$ . В частности, ковариантное уравнение Клейна—Гордона и ковариантное уравнение Дирака в формализме расслоения реперов имеют вид

$$(\square + m^2)\psi(n) = 0,$$

$$(i\gamma^\alpha B_\alpha - m)\psi(n) = 0,$$

где  $\gamma^\alpha$  — обычные матрицы Дирака, а  $\square = \eta^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta$ .

**З а м е ч а н и е.** Как мы видели выше на примерах, волновую функцию, описывающую поля тензорной размерности, можно ввести не только на расслоении  $\mathcal{N}$ , но и на расслоении всех реперов  $\mathcal{R}$ . При этом для нее выполняется структурное условие

$$\psi(bg) = \sigma(g^{-1})\psi(b),$$

где  $\sigma(G)$  — расширение тензорного представления группы Лоренца  $\sigma(\Lambda)$  на группу  $G = GL(4)$ . Для спинорных и тензорно-спинорных представлений группы Лоренца такое расширение невозможно. Поэтому, хотя функцию  $\psi(n)$ , описывающую спиноры, и можно продолжить на расслоение  $\mathcal{R}$ , но нельзя сделать так, чтобы для продолженной функции выполнялось структурное условие относительно группы  $G$ . Спинорный формализм возможен только на расслоении  $\mathcal{N}$ . Упомянем еще, что на самом деле требуется доопределить это расслоение так, чтобы структурной группой его была не группа Лоренца, а ее универсальная накрывающая  $SL(2, \mathbb{C})$ . Это доопределение называется введением *спиновой структуры* на  $\mathcal{X}$ . Для нас эти детали несущественны. О спиновой структуре см., например, [116].

### § 3. Действие обобщенной группы Пуанкаре на расслоении реперов

В предыдущих параграфах мы определили расслоение реперов  $\mathcal{R}$  над искривленным пространством-временем и подрасслоение ортореперов  $\mathcal{N} \subset \mathcal{R}$ . В расслоении  $\mathcal{R}$  действует структурная группа  $G = GL(4)$ , а в расслоении  $\mathcal{N}$  — структурная группа



Лоренца А. Было показано, что состояния частиц можно описывать волновыми функциями на расслоении  $\mathcal{M}$ , подчиненными соответствующему структурному условию. Роль ковариантных производных для таких функций играют базисные векторные поля, которые в расслоении  $\mathcal{B}$  могут быть записаны в явном виде

$$B_\alpha = b_\alpha^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) b_\beta^\nu \frac{\partial}{\partial b_\beta^\lambda} \right),$$

но тем самым определены и на подрасслоении  $\mathcal{M}$ . Теперь мы используем эти поля или дифференциальные операторы для того, чтобы определить на расслоении  $\mathcal{M}$  действие группы путей.

Образует линейную комбинацию базисных полей  $B(a) = a^\alpha B_\alpha$  с числовыми коэффициентами  $a^\alpha$ ,  $\alpha = 0, 1, 2, 3$ . Эти числа можно считать компонентами 4-вектора. Следовательно, каждому 4-вектору  $a$  сопоставляется дифференциальный оператор или горизонтальное векторное поле  $B(a)$ . Эти поля также называются *базисными*. Образует оператор

$$U(a) = e^{B(a)} = e^{a^\alpha B_\alpha}.$$

Очевидна аналогия этого оператора с оператором сдвига в пространстве Минковского  $\exp(a^\alpha \partial / \partial x^\alpha)$ . Оператор  $U(a)$  играет роль оператора горизонтального сдвига в расслоении.

Возьмем теперь произвольную (гладкую) кривую в пространстве Минковского  $\{\xi(\tau) \in \mathcal{M} \mid 0 \leq \tau \leq 1\}$ . Разбивая интервал  $[0, 1]$  на  $N$  частей и устремляя  $N$  к бесконечности, мы тем самым разобьем нашу кривую на семейство очень коротких и почти прямолинейных кривых. Каждую из этих коротких кривых можно заменить соответствующим вектором, а вектору сопоставить оператор горизонтального сдвига. Тем самым кривой  $\{\xi\}$  будет сопоставлен оператор

$$U\{\xi\} = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{B(\Delta\xi_N)} e^{B(\Delta\xi_{N-1})} \dots e^{B(\Delta\xi_1)},$$

где  $\Delta\xi_j = \xi(\tau_j) - \xi(\tau_{j-1})$ ,  $\tau_j = j/N$ .

В случае достаточно гладких кривых соответствующие им операторы  $U\{\xi\}$  не зависят от способа параметризации кривых и от общего сдвига кривых  $\xi(\tau) \mapsto \xi(\tau) + a$ . Кроме того, очевидным образом выполняется групповое свойство

$$U(\{\xi'\} \{\xi\}) = U\{\xi'\} U\{\xi\}. \quad (3.1)$$

В частности, если  $\{\xi'\} = \{\xi\}^{-1}$ , т. е. кривая  $\{\xi'\}$  представляет собой кривую  $\{\xi\}$ , проходящую в обратном направлении, то произведению  $\{\xi'\} \{\xi\} = \{\xi\}^{-1} \{\xi\}$  сопоставляется единичный оператор. Из всего этого следует, что оператор  $U\{\xi\}$  зависит лишь от класса кривых, составляющих путь  $[\xi] = p \in P$ . Следовательно, мы имеем функцию на группе путей, которую можно символически обозначить

$$U(p) = P \exp \left\{ \int_p B(d\xi) \right\}. \quad (3.2)$$

Более того, из (3.1) следует, что эта функция является представлением группы путей, т. е.  $U(p')U(p) = U(p'p)$ .

Представление  $U(P)$  действует в пространстве функций на расслоении  $\mathcal{N}$ . Определим теперь отображение  $p: n \in \mathcal{N} \mapsto np \in \mathcal{N}$ , требуя, чтобы выполнялось соотношение

$$(U(p)\psi)(n) = \psi(np). \quad (3.3)$$

Априори не очевидно, что такое отображение существует. Однако это сразу следует из группового свойства функции  $U(p)$  и из того, что  $\exp(B(a))$  является оператором сдвига. Действительно, любой путь можно представить в виде произведения большого числа очень коротких и почти прямолинейных путей. Из группового свойства представления  $U(P)$  следует, что если формула (3.3) справедлива для таких коротких прямолинейных путей, то она справедлива и для любых путей. Но для коротких прямолинейных путей эту формулу можно вывести непосредственно. Из определения оператора  $B(a)$  следует, что

$$e^{B(a)}\psi(x^\mu, b_\beta^\lambda) = \psi(x^\mu + a^\alpha b_\alpha^\mu, b_\beta^\lambda - a^\alpha b_\alpha^\mu b_\beta^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x)) + O(a^2).$$

Значит, экспонента от  $B(a)$  (при малом  $a$ ) сдвигает аргумент функции, причем точка  $x$  сдвигается на  $\Delta x = a^\alpha b_\alpha^\mu$ , а репер  $b$  над этой точкой сдвигается горизонтально, переходя в репер над точкой  $x + \Delta x$ . Остается заметить, что для короткого прямолинейного пути оператор  $U(p)$  совпадает с экспонентой от  $B(a)$ .

Таким образом, формула (3.3) определяет действие группы путей на расслоении  $\mathcal{N}$  (и даже на расслоении  $\mathcal{B}$ , но это нам не понадобится). При действии пути  $p$  репер  $n \in \mathcal{N}$  переходит в репер  $np$ . Этот переход представляет собой перенос репера вдоль горизонтальной кривой в расслоении, которая начинается в точке  $n$  и кончается в точке  $np$ . Такой горизонтальный сдвиг называется *параллельным переносом* репера. Из выкладки, проделанных в последнем абзаце, следует, что перенос происходит вдоль такой кривой на  $\mathcal{X}$ , которая при ее развертке на касательное пространство дает как раз путь  $p$ .

Мы определили действие на  $\mathcal{N}$  группы путей  $P$ . Кроме того, на  $\mathcal{N}$  определено действие группы Лоренца  $\Lambda$  как структурной группы  $\lambda: n \mapsto n\lambda$ . Это позволяет определить операторы

$$(U(\lambda)\psi)(n) = \psi(n\lambda). \quad (3.4)$$

Теперь остается соединить действие группы путей и группы Лоренца, чтобы получить действие на  $\mathcal{N}$  обобщенной группы Пуанкаре  $Q = \Lambda P$ . Это делается так. Представим произвольный элемент этой группы в виде  $q = \lambda p$ ,  $\lambda \in \Lambda$ ,  $p \in P$ , и положим по определению  $nq = (n\lambda)p$ . Соответственно определим  $U(q) = U(\lambda)U(p)$ . Тогда

$$(U(q)\psi)(n) = \psi(nq). \quad (3.5)$$

При этом определение умножения в группе  $Q$  основывается (гл. 9, § 2) на перестановочном соотношении

$$\lambda[\xi]\lambda^{-1} = [\lambda\xi].$$



Непротиворечивость всех введенных определений является следствием того, что операторы  $B(a)$  удовлетворяют условию

$$U(\lambda) B(a) U(\lambda^{-1}) = B(\lambda a). \quad (3.6)$$

#### § 4. Группа голономии

Таким образом, мы определили действие обобщенной группы Пуанкаре на расслоении ортореперов  $q: n \mapsto nq$  и представление этой группы операторами

$$(U(q)\psi)(n) = \psi(nq).$$

Теперь мы исследуем структуру этого представления и покажем, что оно является индуцированным. Это позволяет перейти в гравитации к той основной схеме, которая использовалась в калибровочной теории: к описанию локальных свойств частиц индуцированными представлениями. Как мы увидим, в случае гравитации следует сразу говорить о представлении обобщенной группы Пуанкаре, а не о группе путей.

Выберем в расслоении ортореперов  $\mathcal{N}$  произвольную точку (репер)  $n_{(0)} \in \mathcal{N}$  и зафиксируем ее. Эта точка будет служить началом отсчета. Поскольку в данном случае  $n_{(0)}$  является репером, то выбор его означает на самом деле одновременный выбор начала отсчета и ориентации (орторепера) в пространстве-времени  $\mathcal{X}$ . Пусть  $H \subset Q$  — стабилизатор репера  $n_{(0)}$ , т. е. множество таких элементов обобщенной группы Пуанкаре, которые оставляют этот репер на месте,

$$H = \{h \in Q \mid n_{(0)}h = n_{(0)}\}.$$

Тогда все расслоение  $\mathcal{N}$  естественно отождествляется с факторпространством  $Q/H$ , т. е. множеством левых классов смежности  $Hq$ . При таком отождествлении смежному классу  $Hq$  сопоставляется репер  $n = n_{(0)}q$ .

Функцию на расслоении  $\psi(n)$  можно теперь записать как функцию  $\Psi(q)$  на группе  $Q$ , постоянную на классах смежности, т. е. удовлетворяющую структурному условию

$$\Psi(hq) = \Psi(q)$$

для всех  $h \in H, q \in Q$ . Операторы  $U(q)$  действуют на такие функции правым сдвигом,

$$(U(q)\Psi)(q') = \Psi(q'q).$$

Если никаких дополнительных условий на функции  $\Psi$  не накладывается, то представление  $U(Q)$ , очевидно, совпадает с представлением  $1(H) \uparrow Q$ , индуцированным из тривиального представления подгруппы  $H$ . Это представление описывает *локальные свойства частиц* в гравитационном поле. *Под локализацией в этом случае понимается локализация не только в пространстве-времени, но и в расслоении  $\mathcal{N}$ .* О реальных состояниях частиц речь пойдет ниже.

Рассмотрим более детально подгруппу  $H$ . Каждый элемент этой группы можно представить в виде  $h = p\lambda$ , хотя элементы  $p \in P$ ,  $\lambda \in \Lambda$  здесь, разумеется, не произвольны, а определенным образом соответствуют друг другу. По определению группы  $H$  репер  $n_{(0)}h = n_{(0)}p\lambda$  совпадает с  $n_{(0)}$ . Но мы знаем, что преобразование из структурной группы  $\lambda$  сдвигает репер вдоль слоя, не переводит его в другой слой. Поэтому если репер  $n_{(0)}$  расположен в слое над точкой  $x_{(0)} \in \mathcal{X}$ , то в том же слое находится и репер  $n_{(0)}p$ . В предыдущем параграфе было показано, что преобразование  $n_{(0)} \mapsto n_{(0)}p$  представляет собой параллельный перенос репера вдоль некоторой кривой, имеющей развертку  $p$ . Раз после переноса репер оказывается над той же точкой, над которой он находился до переноса, значит, перенос осуществляется вдоль замкнутой кривой. Следовательно, *путь  $p$ , фигурирующий в разложении элемента группы  $H$ , всегда соответствует замкнутой кривой на многообразии  $\mathcal{X}$* . При этом сам путь  $p$  (развертка этой кривой на касательное пространство) вовсе не обязан быть замкнутым \*).

Обозначим  $n_{(0)}p = n$ . Мы показали, что репер  $n$  получается из репера  $n_{(0)}$  параллельным переносом вдоль замкнутой кривой с разверткой  $p$ . При этом из условия  $n_{(0)}p\lambda = n_{(0)}h = n_{(0)}$  следует, что  $n = n_{(0)}\lambda^{-1}$ . Это значит, что *параллельный перенос репера  $n_{(0)}$  вдоль замкнутой кривой с разверткой  $p$  приводит к преобразованию репера элементом группы Лоренца  $\lambda^{-1}$* . Перечисление всех элементов  $h = p\lambda$  группы  $H$  означает, следовательно, перечисление всех замкнутых кривых на  $\mathcal{X}$  с началом в точке  $x_{(0)}$ , и указание для каждой такой кривой, к какому преобразованию Лоренца приводит параллельный перенос вдоль нее. Для каждого, кто знаком с дифференциальной геометрией, ясно, что группа  $H$  представляет собой несколько необычное описание группы голономии.

Параллельный перенос некоторого репера  $n_{(0)}$  вдоль любой замкнутой кривой на римановом пространстве  $\mathcal{X}$  переводит его в некоторый другой репер  $n$  из того же слоя. Поскольку все реперы одного слоя связаны друг с другом преобразованиями Лоренца, то  $n = n_{(0)}\lambda^{-1}$  с некоторым  $\lambda^{-1}$ . Таким образом, каждой замкнутой кривой сопоставляется преобразование Лоренца. Если все замкнутые кривые (петли на  $\mathcal{X}$ ) разбить на классы эквивалентности так, что кривым в одном классе сопоставляется один и тот же элемент группы Лоренца, то множество классов петель на  $\mathcal{X}$  образует группу, изоморфную группе Лоренца \*\*). Эта группа и назы-

\*) Кривая на  $\mathcal{X}$  оказывается замкнутой лишь в том случае, если мы строим ее, начиная с репера  $n_{(0)}$ . Применяя тот же путь  $p$  к другому реперу  $n$  (пусть даже в том же слое), мы получим репер  $np$ , который не обязательно лежит в том же слое, что и  $n$ . Другими словами, кривая в многообразии  $\mathcal{X}$ , имеющая ту же самую развертку  $p$ , но построенная начиная с другого репера,  $n$ , уже не обязательно замкнута.

\*\*) На самом деле при этом может получиться группа, изоморфная лишь подгруппе группы Лоренца. Например, в плоском пространстве получится группа, состоящая лишь из единицы. Но в случае общего положения (невыврожденном) получается именно группа Лоренца.



вается *группой голономии*. Мы видим, что введенная нами группа  $H \subset Q$  как раз соответствует группе голономии. Только в группе  $H$  фигурируют не классы петель, а перечисляются сами петли. Каждая петля в  $\mathcal{X}$  характеризуется ее разверткой \*) на касательное пространство  $p$  (развертка может быть и незамкнутой), и каждой петле сопоставляется соответствующий элемент группы Лоренца  $\lambda$ . Хотя из этого следует, что группа  $H$  отличается от того, что обычно понимают под группой голономии, мы условимся для упрощения называть  $H$  *группой голономии*.

Таким образом, расслоение ортореперов  $\mathcal{N}$  представляется как фактор-пространство  $Q/H$  обобщенной группы Пуанкаре по подгруппе голономии. *Подгруппа голономии содержит всю информацию о геометрии псевдориманова пространства  $\mathcal{X}$ , и задание подгруппы  $H \subset Q$  в принципе позволяет восстановить эту геометрию.*

Теперь мы можем разобраться, почему для описания гравитационного поля нам с самого начала потребовалось рассматривать обобщенную группу Пуанкаре, а нельзя было ограничиться лишь группой путей. Действительно, в калибровочной теории роль группы голономии играла подгруппа петель  $L$  вместе с ее представлением  $\alpha(L)$ . Каждая петля  $l \in L$  оставляет на месте начало отсчета пространства Минковского (и, разумеется, не меняет ориентацию, т. е. стандартный репер в пространстве Минковского). Однако каждой петле сопоставляется преобразование  $\alpha(l)$  зарядового пространства  $\mathcal{L}_a$  или, что то же, элемент калибровочной группы. Это и есть описание параллельного переноса вдоль замкнутого пути в пространстве Минковского с калибровочным полем. Другими словами, это описание группы голономии калибровочного поля. В случае же гравитации роль калибровочной группы (структурной группы расслоения) играет группа Лоренца. Существенное отличие этого случая состоит в том, что *группа Лоренца действует не в каком-то независимом, внутреннем или зарядовом пространстве, а в том же пространстве Минковского, в котором задаются пути*. По этой причине мы не можем в гравитации отделить калибровочную группу от путей, а вынуждены рассматривать их вместе. Так получается группа голономии  $H$ . Невозможность разделения исчезает, если вместо группы путей в пространстве Минковского использовать группоид путей в самом пространстве  $\mathcal{X}$  (об этом мы еще поговорим позже). Однако мы предпочитаем пользоваться группой путей в пространстве Минковского, потому что 1) она является группой, а не только группоидом; 2) она универсальна, что важно при квантовании гравитации; 3) выбирая по-разному группы голономии  $H$ , можно не только перечислить все псевдоримановы пространства, но и построить пространства, структура которых обобщает псевдориманову структуру, что может играть роль в квантовой гравитации.

---

\*) Определение *развертки кривой* на аффинное касательное пространство можно найти, например, в книге [27].

Поясним несколько третий пункт. Мы реализовали расслоение ортореперов  $\mathcal{N}$  как фактор-пространство  $Q/H$  и тем самым перешли от геометрической картины к теоретико-групповой. Пока эти картины полностью эквивалентны. Однако это происходит лишь потому, что мы начинаем с геометрической картины и выводим из нее группу голономии. На самом деле групповой подход является более общим, так как подгруппу  $H$  можно выбрать таким способом, что результирующее фактор-пространство  $Q/H$  не может быть интерпретировано как расслоение реперов над псевдоримановым пространством. Вместо этого получается некоторая новая геометрия, в которой пространство-время как 4-мерное многообразие вообще может не существовать. Тем не менее такая геометрия может иметь физический смысл, потому что строится на основе обобщенной группы Пуанкаре, т. е. в конечном счете на основе группы путей в пространстве Минковского. Очень возможно, что в квантовой теории гравитации такого рода обобщенные геометрические структуры должны учитываться.

**З а м е ч а н и е.** Если  $h = p\lambda \in H$ , то путь  $p$  является разверткой замкнутого пути в  $\mathcal{X}$ , но сам, вообще говоря, не является замкнутым. Если  $a = p_{\text{см}}$  — вектор сдвига, соответствующий пути  $p$  (т. е. разность между конечной и начальной точками этого пути), то элементу  $h$  естественно сопоставляется элемент  $a_T\lambda$  группы Пуанкаре, причем отображение  $p\lambda \mapsto a_T\lambda$  является гомоморфизмом группы  $H$  в группу Пуанкаре. Мы говорили уже раньше, что группа Лоренца играет в гравитации роль калибровочной группы. Теперь мы видим, что на самом деле *можно считать, что калибровочной группой для гравитации является группа Пуанкаре*. Группу  $H$  можно интерпретировать как аффинную группу голономии, сопоставляющую каждой петле в  $\mathcal{X}$  не только лоренцев поворот, но и сдвиг аффинного касательного пространства. Имеется много работ, в которых делаются попытки построить теорию гравитации, приняв в качестве калибровочной группы группу Пуанкаре. Во всех этих работах возникают трудности, связанные в конечном счете с тем, что группа Пуанкаре так или иначе должна действовать в пространстве-времени. Мы видим, что группа путей позволяет своеобразным образом ввести действие группы Пуанкаре (а точнее — обобщенной группы Пуанкаре) на пространстве-времени и тем самым построить теорию, в которой группа Пуанкаре играет роль калибровочной группы.

## § 5. Реальные состояния частиц и преобразования системы отсчета

Мы видели, что псевдориманово (искривленное) пространство-время  $\mathcal{X}$ , а точнее — расслоение ортореперов над ним,  $\mathcal{N}$ , можно реализовать как фактор-пространство  $Q/H$  обобщенной группы Пуанкаре по некоторой соответствующим образом выбранной подгруппе  $H$ , которую мы называем группой голономии. Локализованные состояния частиц в искривленном пространстве-времени



(в гравитационном поле) описываются функциями  $\Psi(q)$  на группе  $Q$ , удовлетворяющими структурному условию

$$\Psi(hq) = \Psi(q) \quad (5.1)$$

для любых  $h \in H$ ,  $q \in Q$ , и преобразуются под действием группы  $Q$  как

$$(U(q)\Psi)(q') = \Psi(q'q).$$

Это значит, что  $U(Q) = 1(H) \uparrow Q$ . Теперь мы рассмотрим реальные состояния частиц, т. е. состояния, в которых учтены спин и масса частиц.

Это делается по аналогии с тем, как сделано в главе 9 для частиц в калибровочном поле \*). Это значит, что волновые функции частиц следует подчинить еще одному структурному уравнению, включающему группу Лоренца:

$$\Psi(q\lambda) = \sigma(\lambda^{-1}) \Psi(q) \quad (5.2)$$

(значения функции принадлежат пространству  $\mathcal{L}_s$ ), а также уравнению движения

$$W(\delta)\Psi = 0. \quad (5.3)$$

Здесь  $W$  — функция, определяющая вид уравнения, а  $\delta = \{\delta_\alpha\}$  — генератор правых сдвигов \*\*) с помощью путей, т. е.

$$(\delta_\alpha \Psi)(q) = \left[ \frac{\partial}{\partial a^\alpha} \Psi(qa_p) \right]_{a=0}$$

( $a_p$  — короткий прямолинейный путь,  $a_p = \{\tau a \mid 0 \leq \tau \leq 1\}$ ). Если перейти от функций на группе к функциям на расслоении,  $\psi(n)$ , то те же самые условия будут выглядеть как

$$\psi(n\lambda) = \sigma(\lambda^{-1}) \psi(n), \quad (5.2')$$

$$W(B)\psi = 0, \quad (5.3')$$

где аргументом функции  $W$  являются базисные векторные поля в расслоении  $B_\alpha$ . Эти условия уже обсуждались в § 2.

Далее можно повторить практически без изменения все, что говорилось о реальных состояниях частиц в калибровочном поле (см. гл. 9, §§ 2—4). Поскольку на реальные состояния накладываются условия как относительно левых сдвигов, так и относительно правых сдвигов, то каждое реальное состояние можно интерпретировать как ядро оператора переплетения двух пред-

\*) Несущественные различия связаны с тем, что везде вместо правых сдвигов будут фигурировать левые и наоборот. Это различие связано с тем, что традиционно принято считать, что структурная группа действует на расслоении справа.

\*\*) Во избежание недоразумений заметим, что в этой главе везде  $\delta_\alpha$  будет обозначать генератор правого сдвига, тогда как в главе 9 той же буквой был обозначен генератор левых сдвигов. Это различие несущественно, и в принципе его можно устранив.

ставлений группы  $Q$ . Одно из них — это уже появлявшееся представление  $1(H) \uparrow Q$ . Второе представление действует левыми сдвигами в пространстве функций, удовлетворяющих условиям (5.2), (5.3). Первое представление характеризует только геометрию и никаких параметров частиц не содержит. Второе представление, наоборот, несет в себе информацию о динамических свойствах частицы (спин и масса, точнее — уравнение движения), но абсолютно не учитывает геометрию пространства-времени. *Реальное состояние частицы переплетает эти представления, т. е. описывает способ вложения частицы с заданными характеристиками в пространство-время заданной геометрии.* Мы не будем обсуждать это подробнее и приводить формулу для оператора переплетения, так как это может быть сделано по аналогии с тем, как делалось в гл. 9, § 3 для калибровочной теории (см. также работу [172]).

Обсудим подробнее аналог той конструкции, которая была приведена в гл. 9, § 4, — преобразование системы отсчета. Если взять реальное состояние  $\Psi(q)$ , т. е. функцию, удовлетворяющую условиям (5.1), (5.2), (5.3), и подвергнуть ее левому сдвигу с помощью произвольного элемента  $q \in Q$ , то эти условия нарушатся. Это и неудивительно, так как левый сдвиг функции означает переход к новому опорному реперу вместо  $n_{(0)}$ , а для нового репера группа голономии имеет другой вид. Поэтому если мы хотим рассматривать левые сдвиги, то мы должны ввести более широкое пространство функций, которые описывают реальные состояния по отношению к всевозможным опорным реперам.

Обозначим через  $\mathcal{H}_n$  пространство функций  $\Psi_n(q')$  на группе  $Q$  со значениями в пространстве  $\mathcal{L}$ , удовлетворяющих структурному условию

$$\Psi_n(h_n q' \lambda) = \sigma(\lambda^{-1}) \Psi_n(q') \quad (5.4)$$

и уравнению движения

$$W(\delta) \Psi_n = 0. \quad (5.5)$$

Здесь через  $h_n$  обозначен любой элемент группы  $H_n = \bar{q} H \bar{q}^{-1}$ , где элемент  $\bar{q}$  переводит  $n$  в  $n_{(0)}$ , т. е.  $n\bar{q} = n_{(0)}$ . Группа  $H_n$  играет роль группы голономии по отношению к опорному реперу  $n$ , т. е.  $n h_n = n$  для любого  $h_n \in H_n$ . Функции  $\Psi_n \in \mathcal{H}_n$  описывают реальные состояния частицы по отношению к опорному реперу  $n$ .

Совершим теперь левый сдвиг функции  $\Psi_n \in \mathcal{H}_n$ :

$$(V(q) \Psi_n)(q') = \Psi_n(q^{-1} q'). \quad (5.6)$$

Новая функция, как нетрудно видеть, по-прежнему удовлетворяет уравнению движения (5.5), а также структурному условию (5.4), в котором только  $n$  следует заменить на  $nq^{-1}$ . Следовательно, можно заключить, что

$$V(q) \mathcal{H}_n = \mathcal{H}_{nq^{-1}}.$$

Таким образом, если ввести пространство

$$\mathcal{H} = \bigcup_{n \in \mathcal{N}} \mathcal{H}_n,$$

то в этом пространстве действует представление  $V(Q)$  обобщенной группы Пуанкаре.

Как можно состояния  $\Psi_n \in \mathcal{H}_n$  описать с помощью функций на расслоении? Функции  $\Psi_n(q')$  постоянны на классах  $H_n q'$ . Поскольку группа  $H_n$  является стабилизатором репера  $n$ , класс  $H_n q'$  естественно сопоставить с репером  $n' = nq'$ . Поэтому функции на расслоении следует определить формулой

$$\Psi_n(q') = \psi_n(nq').$$



Нетрудно убедиться, что при таком определении преобразование  $V(q)$  вообще не меняет эти функции:

$$(V(q)\psi_n)(n') = \psi_{nq^{-1}}(n') = \psi_n(n').$$

Таким образом, преобразования  $V(q)$ ,  $q \in Q$ , меняют лишь опорный репер, а с ним и способ описания состояния при помощи функции на группе. Но описание состояния при помощи функции на расслоении не зависит от выбора репера и потому не меняется.

## § 6. Калибровочное поле

### в искривленном пространстве-времени. Интеграл по путям

Мы видели, что искривленное пространство-время можно описать подгруппой  $H \subset Q$ , которая играет роль группы голономии. При этом локализованные состояния частиц преобразуются по представлению  $1(H) \uparrow Q$ , индуцированному из тривиального представления этой подгруппы. Естественно возникает вопрос: нельзя ли придать смысл представлению  $U(Q) = \alpha(H) \uparrow Q$ , где  $\alpha$  — некоторое нетривиальное представление подгруппы  $H$ . Ответ на этот вопрос очевиден: такое представление будет описывать состояния частицы, которая движется в гравитационном поле и обладает некоторыми *внутренними степенями свободы*. Другими словами, это представление описывает частицы, движущиеся в гравитационном и калибровочном поле. А представление  $\alpha(H)$  описывает при этом само *калибровочное поле в искривленном пространстве-времени*.

Действительно, подгруппа  $H \subset Q$  описывает замкнутые кривые на искривленном пространстве  $\mathcal{X}$  и параллельный перенос репера при обходе этих замкнутых кривых (петель на  $\mathcal{X}$ ). Если частица обладает внутренними степенями свободы, которые соответствуют, скажем, пространству  $\mathcal{L}_\alpha$ , то полная характеристика точечного состояния частицы должна включать еще один элемент. Она должна отвечать на вопрос, как преобразуется пространство  $\mathcal{L}_\alpha$  при обходе вдоль петли на  $\mathcal{X}$ . На этот вопрос как раз и отвечает представление  $\alpha(H)$  операторами, действующими в  $\mathcal{L}_\alpha$ .

Таким образом, мы приходим к заключению, что *локализованные состояния* частицы в калибровочном и гравитационном полях описываются функциями  $\Psi(q)$  на группе  $Q$  со значениями в пространстве  $\mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{L}_\sigma$ , удовлетворяющими структурному условию

$$\Psi(hq) = \alpha(h)\Psi(q). \quad (6.1)$$

В пространстве этих функций действует представление  $U(Q) = \alpha(H) \uparrow Q$ . Действие его сводится к правому сдвигу

$$(U(q)\Psi)(q') = \Psi(q'q).$$

В отличие от локализованных, *реальные состояния* частицы в гравитационном и калибровочном полях описываются функциями  $\Psi(q) \in \mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{L}_\sigma$ , удовлетворяющими структурному условию и уравнению поля

$$\Psi(hq\lambda) = [\alpha(h) \times \sigma(\lambda^{-1})] \Psi(q) \quad (6.2)$$

$$W(\delta)\Psi = 0. \quad (6.3)$$

Здесь  $\delta$  по-прежнему генератор правых сдвигов, определенный в предыдущем параграфе. Но если перейти к функциям на расслоении, то он перейдет в ковариантную производную, содержащую как гравитационное, так и калибровочное поля.

Чтобы перейти к функциям на расслоении, нам потребуется (операторнозначная) функция  $\alpha(q)$ , являющаяся расширением функции  $\alpha(h)$  на всю группу  $Q$  и обладающая свойством

$$\alpha(hq) = \alpha(h)\alpha(q)$$

для любых  $h \in H$ ,  $q \in Q$ . С ее помощью мы построим функцию

$$\psi(q) = [\alpha(q)]^{-1} \Psi(q),$$

которая, как легко проверить, постоянна на классах  $Hq$  и может, следовательно, рассматриваться как функция на расслоении  $\mathcal{M}$ . Другими словами,

$$\psi(n) = [\alpha(n_Q)]^{-1} \Psi(n_Q),$$

где  $n_Q$  — любой элемент группы  $Q$ , обладающий свойством  $n_{(0)}n_Q = n$ . С помощью этого определения можно показать, что в силу (6.3) функции  $\psi(n)$  удовлетворяют уравнению движения

$$W(\nabla)\psi = 0, \quad (6.4)$$

где обозначено

$$(\nabla_\beta \psi)(n) = [H_\beta - iA_\beta(n)]\psi(n)$$

и введен аналог вектор-потенциала

$$A_\beta(n) = i[\alpha(n_Q)]^{-1} \frac{\partial}{\partial a^\beta} \alpha(n_Q a^\beta) \Big|_{a=0}.$$

В предыдущих формулах мы пользовались фиксированным опорным репером  $n_{(0)}$ . Переход к любому другому опорному реперу, как всегда, производится при помощи левого сдвига. Рассмотрим функцию  $\Psi_q(q') = \Psi(q^{-1}q')$ . Нетрудно проверить, что она удовлетворяет прежнему уравнению движения

$$W(\delta)\Psi_q = 0$$

и структурному условию

$$\Psi_q(h_q q' \lambda) = [\alpha_q(h_q) \times \sigma(\lambda^{-1})] \Psi_q(q').$$

Здесь обозначено  $h_q \in H_q = qHq^{-1}$  и

$$\alpha_q(h_q) = \alpha(q^{-1}h_qq).$$

Все функции, удовлетворяющие этим условиям, образуют пространство  $\mathcal{H}_q$ . На этом пространстве определены оператор

$$(V(q_1)\Psi_q)(q') = \Psi_q(q_1^{-1}q').$$

Легко проверяется, что  $V(q_1)\mathcal{H}_q = \mathcal{H}_{q_1q}$ . Следовательно, на пространстве

$$\mathcal{H} = \bigcup_{q \in Q} \mathcal{H}_q$$

определено действие представления  $V(Q)$  обобщенной группы Пуанкаре, которое описывает переходы от одного опорного репера к другому.



Чтобы перейти в пространстве  $\mathcal{H}_q$  к функциям на расслоении, введем сначала функции

$$\psi_q(q') = [\alpha_q(q')]^{-1} \Psi_q(q'),$$

где обозначено  $\alpha_q(q') = \alpha(q^{-1}q'q)$ . Проверка показывает, что эти функции постоянны на классах  $H_q q'$ , причем группа  $H_q$  является стабилизатором репера  $n = n_{(0)} q^{-1}$ . Поэтому можно сопоставить классу  $H_q q'$  репер  $nq' = n_{(0)} q^{-1} q'$  и перейти к функции на расслоении

$$\psi_q(q') = \psi_q(nq').$$

Можно показать, что под действием операторов  $V(q_1)$  эти функции преобразуются следующим образом:

$$(V(q_1) \psi_q)(n') = [\alpha(n'_0 q_1 q)]^{-1} \alpha(n'_0 q) \psi_q(n'),$$

где  $n'_0$  — любой элемент группы  $Q$ , обладающий свойством  $n_{(0)} n'_0 = n'$ .

Уравнение движения (6.3) или (6.4) формулируется с помощью бесконечно малых правых сдвигов. Это совершенно аналогично тому, что было в случае чистого калибровочного поля (гл. 9, § 5). Там было показано, что такого рода уравнения можно решать с помощью интеграла по путям. Точно так же и в данном случае, когда имеется и калибровочное, и гравитационное поля, решение уравнения движения можно записать в виде интеграла по путям. Для уравнения Клейна—Гордона

$$(\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta + m^2) \Psi = 0 \quad (6.5)$$

при этом получится выражение для пропагатора, зависящего от собственного времени:

$$K_\tau = \int d\{\xi\} e^{\frac{i}{4} \int_0^\tau d\tau' (\xi, \xi)} U[\xi],$$

где  $U(p)$  — оператор, определенный выше для любого  $q \in Q$ . По этому пропагатору можно найти волновую функцию, зависящую от собственного времени  $\Psi_\tau = K_\tau \Phi$ . Если эта функция зависит от собственного времени экспоненциально,  $\Psi_\tau = \exp(im^2 \tau) \Psi$ , то функция  $\Psi$  удовлетворяет ковариантному уравнению Клейна—Гордона (6.5). Таким образом, представление  $U(Q)$  позволяет свести интеграл по путям в калибровочном и гравитационном полях к интегралу по путям в пространстве Минковского.

Есть другой способ определения интеграла по путям в искривленном пространстве, принадлежащий Де Витту [19]. Он формулируется не в расслоении, а непосредственно в искривленном пространстве. Однако он вместо уравнения (6.5) приводит к уравнению с добавочным членом, пропорциональным скалярной кривизне:

$$(\square + m^2 + \frac{1}{3} R) \psi = 0.$$

Иногда член со скалярной кривизной добавляют, чтобы получить при нулевой массе конформно-инвариантное уравнение. Но в этом случае коэффициент перед скалярной кривизной равен  $1/6$ . Уравнение с коэффициентом, равным  $1/3$ , трудно интерпретировать. Эта трудность в подходе Де Витта до сих пор не преодолена. Мы видели, что предложенное выше определение интеграла по путям, использующее представление группы путей  $U(P)$  и сводящее задачу к интегрированию по путям в пространстве Минковского, не приводит к этой трудности. В случае чистого гравитационного поля (без калибровочного) это определение было сформулировано в работе [170].

## § 7. Группа голономии и петли на искривленном пространстве-времени

Мы видели в предыдущем параграфе, что калибровочное поле в искривленном пространстве-времени можно описывать как представление группы голономии  $\alpha(H)$ , т. е. в конечном счете в терминах группы путей, лежащих в пространстве Минковского. Однако элементы группы голономии однозначно соответствуют замкнутым путям (петлям) на искривленном пространстве-времени  $\mathcal{X}$ . Поэтому калибровочное поле можно описывать также как представление группы петель на  $\mathcal{X}$ . В этом параграфе мы уточним это утверждение.

Действие группы путей на расслоении реперов было определено в § 3 с помощью оператора

$$U[\xi] = P \exp \left\{ \int_{[\xi]} d\xi^\alpha B_\alpha \right\},$$

где

$$B_\alpha = b_\alpha^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) b_\alpha^\mu b_\beta^\nu \frac{\partial}{\partial b_\beta^\lambda}.$$

В частности, если  $b = (x^\mu, b_\beta^\lambda)$ , т. е. точке расслоения  $b \in \mathcal{B}$  соответствует набор координат  $(x^\mu, b_\beta^\lambda)$ , то перенесенный репер  $b[\xi]$  можно определить, действуя оператором  $U[\xi]$  непосредственно на координаты репера, рассматриваемые как функции на расслоении:

$$b[\xi] = U[\xi](x^\mu, b_\beta^\lambda).$$

Результат переноса можно выразить как решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}^\mu(\tau) &= \dot{\xi}^\alpha(\tau) b_\alpha^\mu(\tau); \\ \dot{b}_\beta^\lambda(\tau) &= -\dot{\xi}^\alpha(\tau) b_\alpha^\mu(\tau) b_\beta^\nu(\tau) \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x(\tau)); \\ b &= \{x^\mu(1), b_\beta^\lambda(1)\}; \quad b[\xi] = \{x^\mu(0), b_\beta^\lambda(0)\}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Второе из этих уравнений с учетом первого можно переписать в виде

$$\dot{b}_\beta^\lambda(\tau) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x(\tau)) \dot{x}^\mu(\tau) b_\beta^\nu(\tau) = 0.$$



Оно описывает параллельное перенесение репера вдоль кривой  $\{x(\tau) \in \mathcal{X}\}$ . Первое уравнение показывает, как производится *развертка кривой* на искривленном многообразии  $\{x(\tau)\}$  в кривую на пространстве Минковского  $\{\xi(\tau)\}$ . Для развертки требуется задать над каждой точкой кривой  $x(\tau)$  некоторый репер  $b(\tau)$ , причем так, чтобы получающаяся кривая в расслоении реперов была горизонтальной. Другими словами, поле реперов над кривой получается *параллельным переносом* начального репера вдоль этой же кривой. Если горизонтальное поле реперов над кривой задано, то развертка кривой сводится к разложению касательной к кривой по параллельно перенесенному реперу. Касательная  $\dot{x}^\mu(\tau)$  в точке  $x(\tau)$  разлагается по реперу  $b(\tau) = \{b_\alpha(\tau)\}$ . Коэффициенты разложения  $\xi^\alpha(\tau)$  определяют касательную к развертке.

Пусть теперь  $h = [\xi] \lambda$  — элемент группы голономии  $H$ . По определению это означает, что  $n_{(0)} h = n_{(0)}$  или  $n_{(0)} [\xi] \lambda = n_{(0)}$ . Это дает для граничных условий задачи (7.1)

$$x(0) = x(1) = x_{(0)}; \quad b(1) = n_{(0)}; \quad b(0) = n_{(0)} \lambda^{-1}. \quad (7.2)$$

Отсюда видно, что кривая  $\{x(\tau)\}$ , имеющая развертку  $[\xi]$ , замкнута, а параллельный перенос вдоль этой замкнутой кривой переводит репер  $n_{(0)}$  в репер  $n_{(0)} \lambda$ . Тем самым мы конкретизировали интерпретацию элементов группы  $H$ , которая была сформулирована в § 4.

Более того, с помощью системы уравнений (7.1) мы можем выразить элементы группы голономии через упорядоченные экспоненты, как для обычного калибровочного поля. Только вектор-потенциал будет задан теперь на искривленном пространстве-времени  $\mathcal{X}$ . Действительно, из первого уравнения системы (7.1) следует, что вектор сдвига  $a = [\xi]_{\mathcal{X}} = \xi(1) - \xi(0)$  можно представить в виде интеграла

$$a^\alpha = \xi^\alpha(1) - \xi^\alpha(0) = \int_0^1 d\tau \dot{x}^\mu(\tau) b^{-1\alpha}_\mu(\tau),$$

а соответствующий элемент группы трансляций — как экспоненту

$$a_T = e^{i a^\alpha P_\alpha} = \exp \left( i \int_0^1 d\tau \dot{x}^\mu(\tau) b^{-1\alpha}_\mu(\tau) P_\alpha \right), \quad (7.3)$$

где  $P_\alpha = -i\partial/\partial\xi^\alpha$  — генератор трансляций пространства Минковского.

Немногом более сложно представить в виде упорядоченной экспоненты преобразование Лоренца  $\lambda$ , входящее в выражение  $h = [\xi] \lambda$ . Ясно, что следует использовать второе из уравнений (7.1), предварительно умноженное на  $b^{-1\chi}_\chi$ , и нетрудно сообразить, что выражение для  $\lambda$  должно быть равно

$$\lambda^{-1} = P \exp \left\{ \int_0^1 d\tau \dot{x}^\mu(\tau) B_\mu(x(\tau), b(\tau)) \right\},$$

где  $[B_\mu(x, b)]^\gamma_\beta = \Gamma^\lambda_{\mu\gamma}(x) b^{-1\lambda}_\beta b^\gamma_\beta$ . Чтобы проверить это, используем второе из уравнений (7.1) и приведем выражение для  $\lambda$  к виду

$$\lambda^{-1} = P \exp \left\{ - \int b^{-1} db \right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-b_N^{-1}(b_N - b_{N-1})} \dots e^{-b_1^{-1}(b_1 - b_0)},$$

где  $b_j = b(j/N)$ . В пределе  $N \rightarrow \infty$  каждую из экспонент в этом произведении можно заменить двумя членами из ее разложения. Поэтому правая часть оказывается равной

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (b_N^{-1} b_{N-1}) \dots (b_1^{-1} b_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} b_N^{-1} b_0.$$

Вспоминая, что  $b_N = b(1)$ ,  $b_0 = b(0)$  и учитывая условия (7.2), получим, что это выражение равно  $\lambda^{-1}$ , что и требовалось доказать.

В случае, если множество реперов  $b(\tau)$  получается параллельным переносом некоторого ортонормированного репера, все эти реперы также оказываются ортонормированными. Обозначим их  $b(\tau) = n(\tau) \in \mathcal{N}$ . В этом случае (который нас только и интересует) выражение для  $\lambda$  можно переписать следующим образом:

$$\lambda^{-1} = P \exp \left\{ i \int_0^1 d\tau \dot{x}^\mu(\tau) [B_\mu(x(\tau), n(\tau))]^\beta_\gamma M_{\gamma\beta} \right\}, \quad (7.4)$$

где обозначено  $[B_\mu]^\gamma_\beta = \eta^{\beta\delta} [B_\mu]^\gamma_\delta$ , а  $M_{\gamma\beta}$  — генераторы группы Лоренца

$$M_{\gamma\beta} = \frac{i}{2} \left( \xi_\gamma \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} - \xi_\beta \frac{\partial}{\partial \xi^\gamma} \right).$$

Итак, мы описали элементы группы  $H$  как замкнутые кривые на искривленном пространстве-времени  $\mathcal{X}$  и каждой такой кривой сопоставили элемент группы Пуанкаре (элемент структурной группы аффинного расслоения, см. [26]). Кроме этого, каждой петле  $[x]$  на  $\mathcal{X}$  можно сопоставить преобразование в некотором пространстве  $\mathcal{L}_\alpha$  внутренних степеней свободы, т. е. определить калибровочное поле на  $\mathcal{X}$ . Это можно сделать с помощью соответствующего вектор-потенциала, заданного на  $\mathcal{X}$ :

$$\alpha(h) = \alpha[x] = P \exp \left\{ i \int_{[x]} dx^\mu A_\mu(x) \right\},$$

где  $A_\mu(x)$  — оператор в  $\mathcal{L}_\alpha$  (элемент алгебры Ли калибровочной группы). Поскольку произведению петель на  $\mathcal{X}$  соответствует произведение элементов группы  $H$ , тем самым будет задано представление группы  $H$  в пространстве  $\mathcal{L}_\alpha$ , и мы получаем в несколько более конкретном виде определение калибровочного и гравитационного полей, уже обсуждавшееся в § 6.

Задание вектор-потенциала  $A_\mu(x)$  определяет представление группоида путей на  $\mathcal{X}$ , тогда как калибровочное поле определяется полностью заданием представления петель на  $\mathcal{X}$ . Изменение вектор-потенциала, которое оставляет представление петель не-



изменным, т. е. не меняет калибровочного поля, — это не что иное, как калибровочное преобразование, которое подробно рассматривалось ранее (гл. 6, § 9) в частном случае пространства Минковского.

## § 8. Группа голономии и перспективы применения группы путей в гравитации

Мы видели, что в описании гравитационного поля (искривленного пространства-времени) большую роль играет подгруппа  $H$  обобщенной группы Пуанкаре  $Q$ . Каждый элемент  $h = p\lambda \in H$  обладает свойством  $n_{(0)}h = n_{(0)}$ , т. е. оставляет на месте опорный репер  $n_{(0)} \in \mathcal{N}$ . Геометрически это означает, что параллельный перенос репера  $n_{(0)}$  вдоль кривой, имеющей развертку  $p$ , дает репер  $n_{(0)}\lambda^{-1}$  в том же самом слое.

В группе голономии  $H$  выделяются две характерные подгруппы. Во-первых, это подгруппа  $P_0 = H \cap P$ . Она состоит из элементов вида  $p_0 \in P$  (путей). Элементы этой подгруппы представляют собой развертки таких петель в  $\mathcal{X}$ , параллельный перенос вдоль которых не меняет исходный репер. Нетрудно видеть, что подгруппа  $P_0$  инвариантна в  $H$ . Фактор-группа  $H/P_0$  изоморфна подгруппе группы Лоренца. (В сущности именно эта фактор-группа в точности соответствует тому, что в геометрии называется группой голономии.) Если  $h = p\lambda$  — некоторый элемент группы  $H$ , то смежный класс  $P_0h = P_0p\lambda$  содержит все элементы  $p'\lambda \in H$  с одним и тем же  $\lambda$ . Другими словами,  $P_0p$  — это множество, в которое входят развертки всех петель в  $\mathcal{X}$ , приводящих к одному и тому же параллельному переносу исходного репера (это и есть элемент группы голономии в геометрическом смысле этого слова). В случае общего положения (невыврожденном) фактор-группа  $H/P_0$  изоморфна группе Лоренца.

Далее, в группе  $P_0$  выделяется инвариантная подгруппа  $L_0 = P_0 \cap L$ , состоящая из тех элементов группы  $P_0$ , которые являются петлями (на пространстве Минковского). Фактор-группа  $P_0/L_0$  изоморфна подгруппе группы трансляций, а фактор-группа  $H/L_0$  изоморфна подгруппе группы Пуанкаре. В геометрии она соответствует аффинной группе голономии. В невырожденном случае фактор-группа  $H/L_0$  изоморфна самой группе Пуанкаре. Наоборот, в случае, если  $\mathcal{X}$  — пространство Минковского,  $H = L_0 = L$ , так что фактор-группа  $H/L_0$  тривиальна (состоит лишь из единицы).

Таким образом, в связи с группой голономии  $H$  в обобщенной группе Пуанкаре выделяется следующая структура подгрупп (рис. 30). Прямая, идущая вниз, означает переход к подгруппе. Около каждой такой прямой указан результат факторизации по подгруппе. Через  $\Lambda_0 \subset \Lambda$  обозначена однородная группа голономии (в геометрическом смысле).  $\Lambda_0 T_0 \subset \Lambda T$  — неоднородная (аффинная) группа голономии. Через  $\mathcal{N}_0$  обозначено подрасслоение, которое получается из опорного репера  $n_{(0)}$ , параллельными

переносами вдоль всевозможных кривых. Это подрасслоение имеет ту же базу  $\mathcal{X}$ . В невырожденном случае оно совпадает с  $\mathcal{N}$ , но может быть уже его. Например, если  $\mathcal{X}$  — пространство Минковского, то  $\mathcal{N}_0$  содержит по одному реперу над каждой точкой, и любая кривая в  $\mathcal{N}_0$  горизонтальна. Через  $\mathcal{N}_{00}$  обозначено подрасслоение реперов, получаемых из  $n_{(0)}$ , параллельными переносами вдоль всевозможных кривых, имеющих замкнутую развертку. В невырожденном случае оно также совпадает с  $\mathcal{N}$ , но в вырожденных случаях может быть уже его и даже иметь меньшую базу. Например, если  $\mathcal{X}$  — пространство Минковского, то  $\mathcal{N}_{00}$  состоит из единственного репера  $n_{(0)}$ .

В гл. 6, §§ 2—4, мы уже встречались с нетривиальной группой голономии  $H$ . Там рассматривалось локально плоское пространство-время, которое получается из пространства Минковского отождествлением точек, разделенных интервалом, кратным некоторому фиксированному вектору  $c$  (или являющемуся линейной комбинацией нескольких фиксированных векторов — периодов, — т. е. интервал принадлежит решетке). В этом случае стабилизатором точки оказывается подгруппа  $L_c$ , содержащая пути, векторы сдвига которых принадлежат решетке. Нетрудно видеть, что в этом случае группа голономии  $H$  совпадает с группой  $L_c$ . На этом простом примере мы убеждаемся, что выбором группы голономии можно описать нетривиальную топологию пространства-времени.

Геометрию псевдориманова пространства-времени можно восстановить, зная соответствующую подгруппу голономии  $H \subset Q$  в обобщенной группе Пуанкаре. Действительно, 1) факторизация  $\mathcal{N} = Q/H$  дает структуру множества ортонормированных реперов; 2) действие группы Лоренца на фактор-пространстве,  $\lambda: Hq \mapsto Hq\lambda$ , определяет на  $N$  структуру расслоения и позволяет восстановить базу,  $\mathcal{X} = N/\Lambda$ ; 3) действие группы путей на фактор-пространстве,  $p: Hq \mapsto Hqp$ , определяет в расслоении  $\mathcal{N}$  операцию параллельного переноса, т. е. связность; 4) генераторы параллельных переносов, определяемых прямолинейными путями  $a_p = \{\tau a \mid 0 \leq \tau \leq 1\}$ , есть не что иное, как базисные векторные поля в расслоении  $\mathcal{N}$ ; проектирование их на базу позволяет определить ортонормированные реперы  $n_a = \pi(B_a)$ , а по ним восстановить метрику на  $\mathcal{X}$ .

Можно рассмотреть обобщенные геометрии, которые получаются, если в качестве  $H$  выбирать вообще любые подгруппы группы  $Q$ . Предельными случаями будут  $H=Q$ , когда  $\mathcal{N}=Q/H$  состоит из единственной точки, и  $H=\{1\}$ , когда  $\mathcal{N}=Q/H$  совпадает с  $Q$ . Между ними лежит огромное количество промежуточных случаев, в том числе все расслоения над псевдоримановыми пространствами, но не только они. Важно, что в каждом из этих

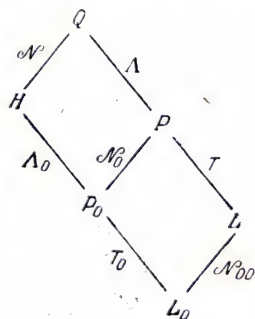


Рис. 30.



случаев в нашем распоряжении имеется что-то вроде метрической структуры, так как в основе конструкции каждый раз лежит группа  $Q$ , содержащая группу Лоренца и группу путей в пространстве Минковского. Можно предположить, что при *квантовании гравитационного поля* следует учитывать не только псевдоримановы структуры, но и геометрические структуры, обобщенные в упомянутом смысле. Основанием для такого предположения является тот факт, что группа путей оказалась не только естественным, но и универсальным инструментом, пригодным для описания как калибровочных, так и гравитационных полей. Чтобы исследовать это предположение и следствия из него, необходимо разработать методы описания подгрупп  $H \subset Q$ , гравитационным полем считать задание подгруппы  $H$  и квантовый ансамбль рассматривать как ансамбль различных подгрупп, введя амплитуду вероятности  $A(H)$ , зависящую от подгруппы.

Хотя выводы здесь делать рано, можно высказать гипотезу, что такого рода обобщенные гравитационные поля будут давать заметный вклад в квантовогравитационные эффекты вблизи *сингулярности* (например, сингулярности, возникающей в результате коллапса или в момент Большого Взрыва). Действительно, в сингулярности пространственно-временная структура, описываемая многообразием, по существу исчезает, и пока неясно, чем ее следует заменить. В то же время анализ физических законов в области вблизи сингулярности и даже в самой сингулярности является в настоящее время актуальной задачей. Попытку такого анализа представляет собой работа [120]. В ней показано, что в сингулярности должны нарушаться обычные физические законы. Разумеется, еще больший интерес должны представлять попытки формулировки альтернативных законов, применимых в сингулярности (см. об этом [118]).

В главе 6 мы видели, что калибровочное поле (в пространстве Минковского) задается представлением  $\alpha(L)$  группы петель. Группа при этом фиксирована, универсальна, а перебор всех полей сводится к перебору представлений этой группы. В случае гравитационного поля ситуация иная. Для его фиксации требуется задать некоторую подгруппу  $H \subset Q$  в обобщенной группе Пуанкаре (подгруппу голономии), в то время как представление этой группы (в случае, если калибровочное поле отсутствует) всегда выбирается тривиальным. Тот факт, что поле задается не представлением, а группой, в ряде случаев вносит определенные неудобства, и стоит поговорить о том, как обойти эту трудность.

Отчасти ситуация улучшается, если рассмотреть пути на искривленном пространстве-времени  $\mathcal{X}$  вместо пространства Минковского  $\mathcal{M}$ . Тогда группа  $H$  оказывается изоморфной группе петель на  $\mathcal{X}$ . При определении группы петель достаточно знать лишь структуру дифференцируемого многообразия на  $\mathcal{X}$ . Задание представления группы петель фиксирует метрические свойства  $\mathcal{X}$  и связность на нем. Ситуация становится похожей на ту, которую

мы имели в случае калибровочного поля. Это и естественно, потому что гравитационное поле можно задать как связность в расслоении над  $\mathcal{X}$ , точно так же, как калибровочное поле — это связность в расслоении над  $\mathcal{M}$ .

Однако этот способ описания гравитационного поля (более близкий к традиционному, чем описание его подгруппой  $H$ ) имеет существенные (с теоретической точки зрения) недостатки. Вместо универсальной группы путей в пространстве Минковского приходится рассматривать группоиды путей в различных многообразиях. При этом теряется и универсальность, и то преимущество, что группа путей является прямым обобщением группы трансляций. Кроме того, необходимость с самого начала задавать структуру многообразия является серьезным недостатком, когда мы приступаем к квантованию гравитационного поля и хотим учесть вклады многообразий с различными топологиями (недиффеоморфных друг другу).

Оказывается, есть способ, позволяющий обойти эти трудности. Он основан на том обстоятельстве, что группа голономии тесно связана с группой 2-петель  $K$ , использованной в гл. 8, § 4, 5 для описания нелокальных частиц и в частности кварков. Точное утверждение состоит в том, что группа  $K$  является накрывающей для любой группы голономии  $H$ .

Напомним, что каждый элемент  $k \in K$  (2-петля) представляет собой упорядоченное семейство путей  $k = \{p(\tau) \in P \mid 0 \leq \tau \leq 1\}$ , причем  $p(0) = p(1) = 1$ , т. е. начальный и конечный пути вырождаются в точку. Если задано искривленное пространство  $\mathcal{X}$  и расслоение ортореперов над ним  $\mathcal{N}$ , то в  $\mathcal{N}$  естественно определено действие каждого пути  $p$ :  $n \mapsto np$  (см. гл. 10, § 3). Возьмем (произвольно выбранный) опорный репер  $n_0 \in \mathcal{N}$  и подействуем на него каждым из путей, входящих в семейство  $k$ . Получим семейство реперов  $n(\tau) = n_0 p(\tau)$ , т. е. кривую в  $\mathcal{N}$ . Очевидно, что начало и конец этой кривой совпадают с опорным репером  $n_0$ . Значит, это замкнутая кривая на  $\mathcal{N}$ , которая при проектировании на базу расслоения  $\mathcal{X}$  даст замкнутую кривую на  $\mathcal{X}$ . Остается вспомнить, что элементы группы голономии  $H$  взаимно однозначно соответствуют замкнутым кривым на  $\mathcal{X}$ . Отсюда следует, что существует естественное отображение  $K \rightarrow H$ . Нетрудно убедиться, что это отображение является гомоморфизмом.

В пространстве Минковского группа голономии  $H$  совпадает с группой петель  $L$ . Гомоморфизм  $\partial: K \rightarrow L$  был использован в гл. 8, §§ 4, 5 для анализа локальных и нелокальных частиц в пространстве Минковского. Теперь мы видим, что и в произвольном гравитационном поле существует гомоморфизм  $\partial_H: K \rightarrow H$  группы 2-петель на группу голономии. Поэтому локальные и нелокальные частицы в гравитационном поле можно описывать по-прежнему в терминах группы  $K$ . Эта группа оказывается универсальной. Внутренние степени свободы каждой частицы описываются некоторым представлением  $\chi(K)$  группы  $K$ . При этом для локальных частиц представление это сводится к представле-



нию группы  $H$  (получается схема, описанная в гл. 10, § 6), а для нелокальной частицы — не сводится. В любом случае представление  $\chi(K)$  содержит информацию как о зарядовых свойствах частицы, так и о ее гравитационных свойствах и о самом гравитационном поле \*).

Можно думать поэтому, что группа 2-петель  $K$  и ее представления являются подходящей основой для совместного описания гравитационного и калибровочного полей и частиц (в том числе и нелокальных — кварков), движущихся в этих полях. Квантование этой единой системы полей сводится к перечислению всевозможных представлений группы  $K$  и построению квантовых ансамблей (амплитуд вероятностей), включающих такие представления.

## КОММЕНТАРИИ К ЧАСТИ II

По калибровочной теории имеется огромное количество литературы. Мы отметим здесь лишь некоторые из тех работ, которые имеют отношение к рассматриваемым вопросам, а также упомянем некоторые обзоры. Первоначальный алгебраический подход к калибровочной теории хорошо описан в оригинальных статьях Янга и Миллса, Сакураи, Гелл-Манна, Глэшоу, Неемана, Салама, Утиямы, Киббла и других. Основные из этих работ опубликованы в сборнике [90]. Что касается геометрической интерпретации калибровочных полей, ставшей общепринятой, то, как это ни странно, обзором с физическим уклоном по этой теме немного. Упомянем книгу [91]. Зато есть много хороших математических книг по теории связностей в расслоенных многообразиях, например [26—28]. Много полезных математических сведений по очень широкому кругу вопросов из дифференциальной геометрии и топологии и к тому же изложенных в доступной форме содержится в книге [30]. Квантовая теория калибровочных полей изложена, например, в последней главе книги [91], в книге [402], в обзорах [92—94, 103—105].

Путезависимый формализм для калибровочной теории и гравитации был развит Мандельштамом [146, 147, 149, 150] и в работе Вилиницкого-Бирюля [148]. Позднее он обсуждался в большом количестве работ. В последнее время поток таких работ неуклонно возрастает. После работ Янга [152] и Ву и Янга [153] несколько изменился угол зрения на этот формализм, который чаще называется теперь методом неинтегрируемых фазовых множителей или контурных переменных. Одно из направлений состоит в исследовании свойств функционала, который получается усреднением по вакууму от упорядоченной экспоненты. Это направление восходит к работе Вильсона [151] и ставит задачей описание в терминах этого функционала самого калибровочного поля, различных его фазовых состояний, а также конфайнмента кварков. Упомянем в этой связи работы [155—164].

Группоид параллельных переносов в искривленном пространстве-времени впервые был рассмотрен в работах Шювегеша [165, 166]. В работе автора [168] был введен группоид путей в пространстве Минковского и показано, что группоид параллельных переносов Шювегеша является одним из его представлений. Группа путей была предложена в работах автора [171—175], но ее представления параллельными переносами использовались для интегрирования по путям в искривленном пространстве-времени еще раньше

\*) Кинематика частицы в гравитационном поле описывается в этом случае представлением  $\chi(K) \uparrow S$  группоида 2-путей. При квантовании гравитации возникает квантовый ансамбль представлений  $\chi$ , но группа  $K$  и факторпространство  $P=S_1/K$  остаются фиксированными. В свете идеологии, изложенной в гл. 6, § 4, это значит, что в квантовой гравитации только путь  $p \in P$  имеет свойства классической наблюдаемой, и его следует использовать вместо наблюдаемой положения.

[167, 169, 170]. Основные положения, касающиеся применения группы путей в калибровочной теории, сформулированы в работе [173]. Следует отметить, что групповое свойство, соответствующее группоиду путей, было использовано в интегральном формализме Янга [152], хотя теоретико-групповая техника при этом не использовалась.

Неабелево обобщение теоремы Стокса в той форме, в которой оно формулируется в гл. 6, § 10, было предложено в работе [173]. В другой форме, но по существу очень близкая теорема доказана Арефьевой [161]. Обобщение теоремы Стокса на неабелевы формы высших размерностей сформулировано и доказано здесь впервые (см. конец гл. 7). Это же относится к классификации неабелевых форм.

Гипотеза о магнитном заряде — монополе — была высказана Дираком в 1931 году [129] и позднее обсуждалась во многих работах [130—139]. Следует различать теоретические работы, посвященные описанию поля магнитного заряда, и работы, в которых исследуется движение самого монополя в полях, создаваемых другими источниками. В последнем случае мы будем говорить о пробном монополе. Формализм путей использовался для исследования полей магнитных монополей в работах [131, 132, 134, 136, 138, 139, 153, 158], из них работы [138, 139, 153, 158] посвящены неабелевым калибровочным монополям.

Пробные абелевы магнитные монополи обсуждаются в работах [131, 134, 136]. Основы кинематики неабелевых пробных монополей были сформулированы в работе [173]. Там же в общих чертах была сформулирована модель кварков как калибровочных дионов. Однако по сравнению с этими результатами содержание главы 8 представляет собой очень существенное развитие, а модель кварков несколько видоизменена и конкретизирована. Гипотеза о том, что лептоны — это кварки, вырвавшиеся на свободу, и предсказание обратного конфайнмента публикуются впервые. Следует отметить, что предложенная в работах [134, 136] модель барионов и кварков имеет много сходных черт с моделью, рассматриваемой в данной книге, но она основана на абелевых монополях и гораздо менее соответствует реальной картине.

Объединение группы путей с группой Лоренца в единую обобщенную группу Пуанкаре предложено в работах [171, 172]. Действие обобщенной группы Пуанкаре на пространстве состояний, отнесенных к всевозможным системам отсчета, рассмотрено здесь впервые. Интерпретация реальных состояний частиц и уравнений движения с точки зрения группы путей очень коротко обсуждалась в [172].

Применение группы путей в гравитации в разных аспектах рассматривалось в работах автора [167—172, 174], хотя в теперешнем виде понятие группы путей появилось лишь в работе [171]. Наиболее полно вопрос о группе путей в гравитации рассмотрен в работах [172, 174]. Тем не менее гл. 10 содержит много нового, а ранее опубликованные результаты изложены в ней намного более детально.



## Глава 11

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ. НЕРЕШЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Мы рассмотрели в этой книге подход к квантовой теории измерений на основе интегрирования по путям и подход к теории частиц в калибровочных и гравитационных полях на основе группы путей. Обсудим полученные результаты и вытекающие из них очередные проблемы. Мы увидим, что в обеих этих областях имеется большое количество как конкретных вычислительных, так и принципиальных вопросов, которые еще требуют своего решения.

#### § 1. Квантовая теория измерений

В части I был сформулирован новый подход к задачам квантовой теории измерений. Важнейшую роль в нем играет теория амплитуд вероятности и в частности фейнмановский интеграл по путям. Рассмотрим перспективы этого подхода.

Методика применения интегралов по путям к задачам теории измерений в основном сформулирована, но конкретные вычисления проведены лишь для простейших систем. Нетрудно рассмотреть в рамках этой методики и некоторые другие задачи. Прежде всего это относится к спектральным измерениям в произвольной линейной системе. После того как решена задача о спектральных измерениях в системе двух связанных осцилляторов (гл. 4, § 6), рассмотрение произвольной линейной системы становится принципиально несложным. Некоторые выводы почти очевидны. Более сложным является расчет измерений в нелинейных системах. В этом случае действие уже не является квадратичной формой, так что интегралы по путям не могут быть вычислены точно. Вместо этого следует применять различные приближенные методы.

Еще одной интересной задачей является расчет измерительной системы, которая следит одновременно за координатой и импульсом (скоростью) системы, фиксируя их значения в каждый момент с определенной точностью. Реализовать такую систему нетрудно. Достаточно кроме датчика положения поставить еще датчик скорости. Расчет такой системы с учетом квантовых эффектов пред-

ставляет кроме практического еще и теоретический интерес. Он может прояснить смысл вигнеровского формализма, в котором используются функции, зависящие как от координаты, так и от импульса.

По-видимому, интересно и несложно произвести расчет измерений в системе, координата которой принимает значения на конечном интервале. Примером такой системы является ротор, положение которого задается углом  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . В этом случае погрешность измерения координаты принципиально не может быть больше определенной величины (для ротора  $2\pi$ ), так что возникает дополнительное ограничение на точность оценки силы, действующей на систему.

Кроме конкретного расчета измерительных систем, представляется важным более глубоко проанализировать на основании предложенной методики процесс *редукции состояния* под действием измерения. Очень интересно рассмотреть случаи, когда редукция происходит *спонтанно*, в результате действия самой системы, безотносительно к воздействию каких-то внешних, измерительных систем. Это может, по-видимому, происходить в тех случаях, когда система в целом является макроскопической (скажем, кристалл) и описывается классическими законами, и в то же время ее макроскопические свойства влияют на поведение микроскопических составных частей (скажем, атомов, составляющих кристалл, или электронов в нем). Возможно, что рассмотрение спонтанной редукции окажется полезным для понимания некоторых процессов, рассматриваемых в статистической физике, в том числе фазовых переходов.

Наконец, большой класс задач возникает, если попытаться систематически учесть влияние *редукции состояний в релятивистской физике*. Обычно в этой области явлений (в квантовой теории поля) применяется чисто динамический подход, при котором не только не учитывается явно влияние измерительной системы, но вообще принимаются такие нефизические по существу гипотезы, как бесконечность объема и интервала времени, в которых происходят изучаемые процессы. Во многих случаях такая идеализация оправдана. Но в то же время именно с идеализациями такого типа связаны иногда бесконечности, появляющиеся в теории. Заранее очевидно, что если учесть конечность области взаимодействия (т. е. наличие измерительной системы конечных размеров), то по крайней мере некоторые из этих бесконечностей (инфракрасные) исчезнут.

Есть одна релятивистская задача, в которой применение квантовой теории измерений кажется настоятельно необходимой. Это задача о *рождении пар из вакуума* в сильных полях (например, электромагнитных или гравитационных). Эта задача в последнее время интенсивно изучается, главным образом в связи с рождением пар при гравитационном коллапсе [124—123]. При этом возникает принципиально важный и до сих пор неясный вопрос о том, как определить частицы (вакуум) в условиях сильного



поля. Этот вопрос ставится и решается в большой степени формально. В результате возникают неопределенности.

В то же время с помощью интегрирования по путям можно поставить и решить задачу о рождении пары так, что картина становится совершенно ясной и неопределенности не возникают. Дело в том, что рождающуюся пару можно представить себе как частицу, движущуюся в некотором коридоре в пространстве-времени. Этот коридор идет вдоль некоторой времениподобной кривой из будущего в прошлое, затем поворачивает и идет вдоль времениподобной кривой из прошлого в будущее. Точка поворота — это точка рождения пары. Ясно, что амплитуду вероятности рождения в этом случае можно вычислить как интеграл по путям, расположенным в пределах данного коридора. Интеграл по путям должен быть релятивистским. Например, он может быть сформулирован с помощью параметра собственного времени, по которому в конце производится интегрирование (см. гл. 9, § 5 и гл. 10, § 6).

Результат такого расчета отчасти даже очевиден. Если коридор имеет ширину много меньше, чем комптоновская длина, то вероятность рождения такой пары всегда велика, для любого коридора. Однако это всего лишь рождение виртуальной пары. Реальная пара должна описываться коридором шириной порядка комптоновской длины. При этом амплитуда рождения пары оказывается исчезающе малой всегда, за исключением того случая, когда вблизи точки поворота нарушение обычной (как в пространстве Минковского) метрической структуры имеет масштаб меньше или порядка комптоновской длины. Например, это может быть сильное искривление пространства-времени (с радиусом кривизны меньше комптоновской длины). В частности, поворот может произойти вблизи сингулярности пространства-времени. Поэтому можно сделать вывод, что вблизи сингулярности (на расстоянии порядка комптоновской длины) могут рождаться пары. Важно, что при таком подходе вопрос о способе определения частиц (об определении положительночастотных волновых функций) вообще не возникает. Интересно было бы сравнить результаты такого подхода с теми, которые получаются при том или ином формальном определении частиц (вакуума) или граничных условий в сингулярности (см., напр., [124—128]).

Наконец, отметим, что развитый в ч. I подход может быть использован для построения более последовательной, чем имеющаяся в настоящее время, *квантовой теории вероятностей*. Главную роль при этом должно играть исчисление амплитуд вероятности и интеграл по путям как частный случай этого исчисления. В то же время можно попытаться дать теоретико-групповую интерпретацию самого интеграла по путям (см. по этому поводу Замечание в конце гл. 9, § 5). Это представляется важным, потому что *теория групп вообще лежит в основе теории вероятностей*. Иногда это не столь очевидно. Но если вдуматься, то определение любой вероятностной меры сводится к определению некоторого

пространства событий, которые все равноправны между собой и поэтому имеют одинаковую вероятность (в общем случае следует говорить, что плотность вероятности на этом пространстве постоянна). Но это означает, что пространство является однородным, т. е. на нем транзитивно действует некоторая группа симметрии. По-видимому, теория интеграла по путям не будет полной, если не дать для него подобной интерпретации. Замечание в конце гл. 9, § 5 показывает, что это можно сделать с помощью подгруппы параметризованных путей.

## § 2. Группа путей

В ч. II на многочисленных примерах мы убедились, что для квантовой теории поля полезным математическим аппаратом может служить группа путей и связанная с ней обобщенная группа Пуанкаре. Проведенный анализ основывался на некоторых очевидных свойствах этих групп и таких представлениях их, которые имеют ясный физический смысл и фактически уже появлялись ранее в физической литературе (хотя без должной теоретико-групповой интерпретации). Однако если придавать группе путей особое значение и расширять сферу ее приложений, то необходимо, разумеется, более тщательно изучить ее структуру и найти как можно более широкий класс представлений этой группы и связанных с ней других групп. В этой связи следует подчеркнуть, что группа путей относится к такому классу групп, которые математиками, по-видимому, всерьез не исследовались. Мало того, что это бесконечномерная группа, т. е. ее элементы задаются не числовыми параметрами, а функциями. Даже среди бесконечномерных групп она отличается своей сложностью. Дело в том, что группа путей не принадлежит к классу бесконечномерных аналогов групп Ли, классу, который сравнительно хорошо исследован. Это проявляется в том, что произвольный элемент группы путей (или даже подгруппы петель) нельзя связать с единицей группы однопараметрической подгруппой. Поэтому для нее нельзя построить такого полезного вспомогательного объекта, как алгебра Ли. Элементы группы путей невозможно представить в форме экспонент. И все обычные методы исследования бесконечномерных групп Ли оказываются к этой группе неприменимыми.

Тем более важно начать исследовать эту группу и другие родственные ей группы, создавая для этого соответствующую методику. Можно предложить два направления исследований, в которых первые шаги уже очевидны. Они касаются инвариантной меры на группе путей и произвольных представлений группоида путей.

В главе 6 мы довольно подробно (хотя и недостаточно строго с математической точки зрения) рассмотрели представление группы петель, которое задается упорядоченными экспонентами от 1-формы  $A = A_\mu dx^\mu$  и поэтому сводится к связности на некотором



расслоении над пространством Минковского. Точнее, представление группы петель задается классом калибровочно эквивалентных 1-форм, а каждая конкретная форма  $A$  определяет представление группоида путей. По-видимому, при наложении некоторых условий гладкости (более сильных, чем непрерывность) представление группоида заведомо относится к этому типу (или отличается от него чисто топологическим фактором, какие рассматривались в главе 7).

Но если таких жестких условий гладкости не накладывать, то существуют представления более общего вида. Более общее представление группоида путей соответствует «связности первой степени» (в отличие от линейной связности). Оно определяется упорядоченными экспонентами вдоль путей от однородной формы первой степени  $A(dx)$ . Например, это может быть форма вида  $A(dx) = (A_{\mu\lambda}(x) dx^\mu dx^\lambda)^{1/3}$ . Тогда представление задается симметричным тензорным полем третьего ранга. Ясно, что представления такого типа приводят к некоторому обобщению калибровочного поля. Поскольку представление группы петель оказалось в квантовой теории поля фундаментальным понятием, можно думать, что такого рода обобщенные калибровочные поля могут соответствовать некоторым реальным взаимодействиям. Было бы интересно их исследовать.

Инвариантная мера на группе путей за счет факторизации  $P/L = \mathcal{M}$  легко сводится к инвариантной мере на группе петель. А к исследованию этой последней можно подойти следующим образом. Любое представление  $\alpha(L)$  группы  $L$  есть гомоморфизм ее на некоторую группу  $G$ . В простейших случаях (например, в случае калибровочного поля) группа  $G$  является группой Ли и обладает единственной инвариантной мерой (мерой Хаара). Но ведь существует изоморфизм  $G = L/J$ , где  $J$  — ядро гомоморфизма  $\alpha$ . Следовательно, задание представления  $\alpha(L)$  позволяет построить инвариантную меру на фактор-группе  $L/J$ . Если построить последовательность представлений (гомоморфизмов)  $\alpha_i: L \rightarrow G_i$  так, чтобы в пределе ядро гомоморфизма стремилось к нулю (точнее, к группе, состоящей лишь из единицы), то в этом пределе мы получим меру на самой группе  $L$ , причем по построению мера будет инвариантной. Эту процедуру можно сформулировать в терминах вектор-потенциалов и упорядоченных экспонент. Разумеется, при этом возникает сложный вопрос о единственности построенной меры или о перечислении всех возможных инвариантных мер. Не исключено, что произвол в выборе инвариантных мер имеет в данном случае физическую интерпретацию.

### § 3. Квантовая теория поля

В ч. II было продемонстрировано, что теорию частиц, движущихся в калибровочных и гравитационных полях, можно изложить как теорию различных представлений группы путей и обобщенной группы Пуанкаре. Возникает вопрос, какие еще возможности заключает в себе предлагаемый подход.

Прежде всего следует заметить, что мы рассматривали лишь классические калибровочные и гравитационные поля. Поэтому закономерным является вопрос, как следует производить *квантование полей* в рамках данного подхода. Для *квантования калибровочного поля* можно предложить два способа, причем оба кажутся естественными. Если теория квантовых частиц в заданном классическом поле построена, то полную теорию можно получить с помощью функционального интегрирования по различным конфигурациям классического поля [102, 92]. В этом заключается первый способ. Второй состоит в том, чтобы при характеристизации представления группы петель вектор-потенциалом  $A_\mu(x)$  считать его оператором не в зарядовом пространстве  $\mathcal{L}_\alpha$ , а в пространстве-произведении  $\mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{F}$ , где  $\mathcal{F}$  — пространство состояний квантованного калибровочного поля. При этом все результаты, полученные в ч. II книги, остаются справедливыми, поскольку для них несущественна природа операторов  $A_\mu(x)$ . Таким образом можно получить теорию квантованных калибровочных полей на языке операторов поля (в формализме *вторичного квантования*).

Оба эти способа в равной мере применимы и для квантования гравитационного поля, если перейти к путям и формам на самом (искривленном) пространстве-времени  $\mathcal{X}$  вместо универсального пространства Минковского  $\mathcal{M}$ . Однако это не кажется естественным в контексте путезависимого формализма и кроме того требует априори фиксировать топологию пространства-времени  $\mathcal{X}$ . Вместо этого можно воспользоваться тем, что, как показано в гл. 10, § 8, гравитационное и калибровочное поля описываются представлениями *группы 2-петель*  $K$  (имеются в виду 2-петли в пространстве Минковского). Поэтому квантование этих полей сводится к построению квантовых ансамблей, включающих различные представления одной и той же универсальной группы  $K$ . Можно показать, что это по существу совпадает с тем способом квантования гравитации, который предложил Мандельштам в работе [147]. В то же время теперь мы знаем, что этот способ имеет дополнительное преимущество, позволяя единообразно описать частицы в гравитационном поле и нелокальные частицы (в том числе кварки, если они являются таковыми). Тем самым можно сделать шаг к объединению гравитации с негравитационными взаимодействиями.

Проблема *объединения* (унификации) различных типов *взаимодействий* является сейчас самой, пожалуй, животрепещущей в квантовой теории поля. Объединение слабых и электромагнитных взаимодействий можно считать принципиально решенной задачей. Принципы этого объединения, очевидно, угаданы в модели Салама—Вайнберга и принесли с собой в теорию новые и чрезвычайно интересные моменты (спонтанное нарушение симметрии и эффект Хиггса). Задача объединения сильного взаимодействия с электро-слабым более или менее успешно решается в настоящее время. Некоторые схемы этого так называемого *великого объединения*



или гранд-объединения вполне серьезно обсуждаются в литературе. Хотя здесь еще далеко не все ясно, однако пока не видно, чтобы на пути этого объединения были принципиальные трудности.

Последним шагом в этой цепочке должно быть объединение гравитационного взаимодействия с сильными, слабыми и электромагнитными взаимодействиями, другими словами — *объединение гравитации с калибровочной теорией*. И пока неясно, как следует производить такое объединение. Единственным твердым ориентиром является то, что и калибровочная теория, и гравитация оказались в своей основе теориями геометрическими. Это указывает на то, что унификация их возможна. Однако специфика гравитационного поля слишком велика, так что до сих пор его не удастся рассмотреть вместе с калибровочным полем единообразно. Главная трудность состоит в том, что группу трансляций оказывается невозможным локализовать (превратить в калибровочную) таким же точно способом, как это делается с теми группами, которые не затрагивают пространства-времени. Мы видели, что группа путей, а точнее обобщенная группа Пуанкаре, одинаково естественно возникает и в калибровочной теории, и в гравитации. Можно надеяться, что группа путей откроет для объединения гравитации и калибровочной теории новые возможности.

Разумеется, невозможно пока сказать, каким образом это произойдет (если вообще произойдет). Однако некоторые соображения можно высказать уже сейчас. Главной проблемой является объединение гравитации с сильными взаимодействиями, а в сильных взаимодействиях основными объектами являются *кварки*. В гл. 8, § 6 была построена модель кварков как калибровочных дионов, т. е. существенно *нелокальных частиц (струн)*. В гл. 8, § 4, 5 было показано, что нелокальная частица уже не описывается представлением группы петель  $L$ . Вместо этого ее кинематические свойства задаются представлением *группы 2-петель*  $K$ . И вот счастливым образом оказывается, что описание кварков и описание гравитационного поля можно производить одновременно, в терминах одной и той же группы  $K$ . Возможно, это указывает на один из возможных способов унификации гравитационных и сильных взаимодействий.

Из других проблем, которые могут быть поставлены в рамках теоретико-группового подхода, следует упомянуть еще проблему *гравитационного монополя* [140—145]. При построении групповой теории гравитационного монополя можно опираться на аналогию с калибровочным монополем (гл. 6, § 5 и гл. 8). Гравитационное поле, как всегда, вносит и здесь свою специфику. По всей вероятности, эта задача представляет интерес. Гравитационные монополи, если они существуют, могут играть роль в физике *черных дыр* и гравитационных *сингулярностей*.

Заканчивая этот перечень нерешенных проблем, отметим еще раз, что группа путей и обобщенная группа Пуанкаре привлекательны прежде всего тем, что оказались универсальными, пригод-

ными как в пространстве Минковского, так и в искривленном пространстве-времени. Именно поэтому можно надеяться, что они помогут объединить гравитационные взаимодействия с другими типами взаимодействий. Но такая универсальность заставляет также думать и над тем, не таится ли в этих группах более глубокий смысл, *более глубокое понимание пространственно-временных отношений*. Кажется правдоподобным, что в рамках квантовой гравитации привычный способ описания пространственно-временных отношений с помощью пространственно-временного многообразия становится неадекватным. Возможно, что сама обобщенная группа Пуанкаре является хорошей заменой многообразия.

С физической точки зрения главное преимущество этой группы перед многообразием заключается в том, что она позволяет более эффективно описывать связь и взаимопроникновение *глобальных* и *локальных* аспектов в описании микромира. В схемах, рассмотренных в этой книге, такая связь осуществляется группой голономии и ее представлениями, описывающими внутренние степени свободы частицы. Но в будущей теории, возможно, такая связь станет гораздо глубже. Можно представить себе, что локальные и глобальные явления станут принципиально неразделимы, а точка пространства-времени исчезнет из теории как точное понятие. Но группа путей, обобщенная группа Пуанкаре или родственные им группы или пространства при этом вполне могут сохранить смысл.



## ПРИЛОЖЕНИЯ

### А. ТЕХНИКА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Тех сведений об интегралах по путям, которые содержатся в последних двух параграфах главы 2, достаточно, чтобы получить все результаты части I книги. Более того, их достаточно для рассмотрения гораздо более широкого круга вопросов. Однако у читателя, впервые знакомящегося с техникой интегралов по путям, могло сложиться впечатление, что это техника громоздкая и неудобная. На самом деле физики научились обращаться с интегралами по путям и вообще с функциональными интегралами как с очень простыми объектами, позволяющими существенно упростить некоторые этапы вычислений.

Известно, что амплитуды различных реакций в квантовой теории поля рассчитываются с помощью *диаграмм Фейнмана*. Каждой диаграмме Фейнмана по определенным правилам (правилам Фейнмана) сопоставляется некоторая амплитуда вероятности, после чего все такие амплитуды нужно сложить. Однако в случае, если взаимодействие в теории имеет сложную структуру, правила Фейнмана усложняются настолько, что перечисление всех диаграмм и выписывание соответствующих им амплитуд становится сложнейшей комбинаторной задачей, в которой легко ошибиться. Между тем на языке функциональных интегралов окончательный ответ записывается довольно просто. Именно поэтому функциональные интегралы стали в квантовой теории поля необходимым рабочим инструментом.

По нашему мнению, интегралы по путям представляют собой удобную математическую технику также и в нерелятивистской квантовой теории. В гл. 2, §§ 1, 2 мы показали, что они позволяют просто и естественно формулировать задачу о расчете непрерывного измерения. Теперь попытаемся показать, как обращаться с самими интегралами так, чтобы не увязать в деталях, связанных с их определениями.

#### § 1. Определение функционального интеграла

Для этого нам придется опуститься на еще более низкий уровень математической строгости, принятый в таких случаях в физической литературе. Мы получим правила вычисления функцио-

нальных интегралов, выводя их по аналогии с вычислением конечнократных интегралов. Основой для этого является гауссов интеграл, который мы запишем в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}\beta x^2} = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{1/2}. \quad (\text{A.1})$$

Этот интеграл хорошо определен при действительных положительных значениях параметра  $\beta$ , но может быть аналитически продолжен на комплексные значения этого параметра. Необходимо лишь, чтобы действительная часть  $\beta$  была положительна.

Возводя формулу (A.1) в степень  $n$ , мы получим гауссов интеграл в конечномерном пространстве, который можно записать в виде

$$\int dx e^{-\frac{1}{2}\beta(x, x)} = 1,$$

где обозначено

$$dx = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{n/2} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{n/2} \prod_{i=1}^n dx_i, \\ (x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Теперь нетрудно перейти к случаю, когда в показателе экспоненты стоит квадратичная форма  $(x, Bx)$ , определяемая произвольной невырожденной симметричной матрицей  $B$ . Переходя к новым переменным интегрирования  $x' = B^{-1/2} x$ , получим

$$\int dx e^{-\frac{1}{2}(x, Bx)} = 1,$$

где обозначено

$$dx = \left(\det \frac{B}{2\pi}\right)^{1/2} \prod_i dx_i. \quad (\text{A.2})$$

Отметим, что меру интегрирования в  $n$ -мерном векторном пространстве мы определяем в зависимости от того, какая квадратичная форма стоит в показателе экспоненты (хотя отличаются эти меры лишь численными множителями).

Если в показателе экспоненты произвольная форма не выше второй степени,  $-\frac{1}{2}(x, Bx) + (x, b)$ , то заменой переменных  $x' = x - B^{-1}b$  можно свести этот случай к предыдущему, что дает

$$\int dx e^{-\frac{1}{2}(x, Bx) + (x, b)} = e^{\frac{1}{2}(b, B^{-1}b)} \quad (\text{A.3})$$

с тем же самым определением (A.2) меры  $dx$ .

До сих пор мы рассматривали лишь интегралы гауссова типа, подынтегральное выражение которых является экспонентой от формы степени не выше двух. Дифференцируя обе части формулы



(А.3) по компонентам вектора  $\mathbf{b}$ , легко получить формулу для интегралов более общего вида:

$$\int d\mathbf{x} x_{i_1} \dots x_{i_r} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}, B\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{b})} = \frac{\partial}{\partial b_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{i_r}} e^{\frac{1}{2}(\mathbf{b}, B^{-1}\mathbf{b})}.$$

Беря линейные комбинации таких интегралов с произвольными коэффициентами, получим

$$\int d\mathbf{x} G(\mathbf{x}) e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}, B\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{b})} = G\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{b}}\right) e^{\frac{1}{2}(\mathbf{b}, B^{-1}\mathbf{b})}. \quad (\text{А.4})$$

В частности, полагая в этой формуле  $\mathbf{b} = 0$ , имеем

$$\int d\mathbf{x} G(\mathbf{x}) e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}, B\mathbf{x})} = \left[ G\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{b}}\right) e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{b}, B^{-1}\mathbf{b})} \right]_{\mathbf{b}=0}. \quad (\text{А.5})$$

Проведенные рассуждения непосредственно доказывают эти формулы для полиномиальных функций  $G(\mathbf{x})$ , но рассматривая предел, когда степень полинома неограниченно возрастает, можно распространить их на случай любых функций, разложимых в степенной ряд.

Теперь мы можем, неограниченно увеличивая размерность векторного пространства, из которого берутся векторы  $\mathbf{x}$ , перейти в пределе к случаю функционального пространства. В сущности именно так мы поступали в гл. 2, §§ 3, 4 при определении интеграла по путям, и рассуждения этого параграфа отличаются лишь несколько большей общностью обозначений. Можно считать, что формулы (А.4) и (А.5) уже относятся к *интегрированию по путям или функциям*. Для этого следует лишь считать, что  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{b}$  — это пути (или функции на любом многообразии), а  $(,)$  — скалярное произведение двух функций, линейное по обоим аргументам, т. е. интеграл их произведения. Переход к функциональному пространству можно сделать особенно наглядным, если все формулы для конечномерных векторов записать через векторные индексы, а затем считать, что индекс — это аргумент функции и вместо суммирования по индексам перейти к интегрированию по аргументу.

Например, скалярное произведение двух векторов записывается в виде  $(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = \sum_i x_i b_i$ . Заменим теперь дискретный индекс  $i$  на непрерывный параметр  $t$  и от их суммирования перейдем к интегрированию. Получим

$$(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = \int dt x(t) b(t).$$

При этом  $t$  не обязательно обозначает один числовой аргумент. Это может быть вектор, т. е. точка многомерного пространства. Точно так же  $dt$  может обозначать любую меру (в частности, интегрирование с весом) в пространстве, к которому принадлежит аргумент  $t$ .

При замене дискретного индекса  $i$  на непрерывный аргумент  $t$  обычные производные по компонентам вектора  $\partial/\partial b_i$  превращаются в *вариационные производные* по значению функции в заданной точке  $\delta/\delta \mathbf{b}(t)$ . Остановимся на этом несколько более подробно. Пусть  $\Phi(\mathbf{b})$  — функционал, зависящий от функции  $t \mapsto b(t)$ . Это значит, что каждой данной функции  $\mathbf{b}$  сопоставляется некоторое число  $\Phi(\mathbf{b})$ . Пусть функция меняется бесконечно мало:  $b(t) \mapsto b(t) + \delta b(t)$ . Тогда значение функционала также изменится. Разлагая приращение функционала  $\delta\Phi(\mathbf{b})$  по степеням  $\delta b(t)$  и удерживая только члены первой степени, получим

$$\delta\Phi(\mathbf{b}) = \int dt \Lambda(t) \delta b(t).$$

Появляющаяся таким образом функция  $\Lambda(t)$  и есть по определению *вариационная производная* данного функционала по его аргументу,  $\Lambda(t) = \delta\Phi(\mathbf{b})/\delta b(t)$ . Таким образом, можно определить вариационную производную равенством

$$\delta\Phi(\mathbf{b}) = \int dt \frac{\delta\Phi}{\delta b(t)} \delta b(t). \quad (\text{A.6})$$

С учетом всего сказанного можно переписать формулу (A.4) так, чтобы она была применима к *функциональному интегралу*:

$$\int dx G(x) e^{-\frac{1}{2}(x, Bx) + (b, x)} = G\left(\frac{\delta}{\delta b}\right) e^{\frac{1}{2}(b, B^{-1}b)}, \quad (\text{A.7})$$

где обозначено

$$dx = \left(\det \frac{B}{2\pi}\right)^{-1/2} \prod_t dx(t). \quad (\text{A.8})$$

Теперь полужирная буква обозначает путь (или вообще функцию), скалярное произведение — интеграл произведения двух функций,  $G$  — функционал, сопоставляющий данной функции число,  $\delta/\delta \mathbf{b}$  — функцию, значениями которой являются вариационные производные в разных точках:  $t \mapsto \delta/\delta b(t)$ .  $B$  здесь обозначает линейный оператор в пространстве путей (функций), который может быть задан как интегральный или дифференциальный оператор;  $B^{-1}$  — линейный оператор, обратный по отношению к  $B$ .

Наконец,  $\det B$  означает *детерминант линейного оператора*. Его можно определить как предел детерминанта матрицы, когда размерность матрицы неограниченно возрастает. На практике такого рода бесконечномерные детерминанты часто вычисляют по формуле

$$\det B = e^{\text{Tr} \ln B}, \quad (\text{A.9})$$

где  $\text{Tr}$  означает след оператора. Для интегрального оператора с ядром  $B(t, t')$  след определяется как  $\int dt B(t, t)$ . Логарифм опе-



ратора чаще всего вычисляют, представляя оператор в виде  $B=1-C$  и пользуясь разложением в ряд

$$-\ln(1-C) = C + \frac{1}{2} C^2 + \frac{1}{3} C^3 + \dots \quad (A.10)$$

Впрочем, детерминант, фигурирующий в формуле (A.8), не требуется сам по себе, поскольку он введен лишь для правильной нормировки меры (ср. гл. 2 § 3). Правильным способом действия является замена всех входящих в (A.7) величин их конечномерными аппроксимациями и затем одновременный переход к пределу по размерности аппроксимации. Детерминанты требуются лишь при переходе в функциональном интеграле к новой переменной.

Сделаем несколько замечаний по поводу формулы (A.7) и ее применения. Разумеется, следует помнить, что формула эта применима не всегда, и все вышеизложенное следует считать отнюдь не доказательством ее, а эвристическими соображениями в пользу того, что в некоторых случаях такая формула применима. Детали читатель может найти в специальной литературе. Строгое математическое обоснование процедуры интегрирования по путям содержится в работах [12, 13, 16, 21, 22], где мы старались расположить ссылки в порядке возрастающей сложности. С практикой применения функциональных интегралов в физике можно познакомиться в работах [12, 14, 15, 20, 91, 94, 102], хотя этот список можно было бы очень существенно расширить.

Все же те эвристические рассуждения, которые привели нас к формуле (A.7), позволяют сделать несколько оговорок. Мы исходили из гауссова интеграла (A.1), который хорошо определен, если действительная часть параметра  $\beta$  положительна. Соответственно формулы (A.4) и (A.7) применимы лишь в том случае, если эрмитова часть оператора  $B$  положительна. В теории вероятностей, теории броуновского движения и диффузии возникают именно такие операторы. Именно по этой причине интеграл по путям в этих теориях хорошо определен, и можно построить меру на пространстве путей в смысле обычного определения меры, используемого математиками.

Операторы  $B$ , возникающие в квантовой теории, обычно оказываются антиэрмитовыми, т. е. находятся на границе допустимой области. Чтобы определить тем не менее интеграл по путям, к бесконечно малую положительно определенную эрмитову часть. Иначе можно сказать, что интеграл по путям определяют в той области, в которой он хорошо определен, а затем с помощью предельной процедуры доопределяют его на границе этой допустимой области. При этом, однако, нужно каждый раз четко фиксировать предельную процедуру, иначе может возникнуть неоднозначность. В формуле (A.7) неоднозначность сказывается в том, что оператор  $B^{-1}$  определяется неоднозначно. Если же мы, имея дело с некоторым конкретным оператором  $B$  (т. е. в данной определенной фи-

зической теории), выберем (из физических соображений) и зафиксируем один из операторов  $B^{-1}$ , то после этого формула (А.7) автоматически доопределяет все возникающие в теории функциональные интегралы. Именно так обычно и поступают и тем самым обходят трудность, заключающуюся в том, что «фейнмановский интеграл нельзя определить как меру в пространстве функций».

Важно подчеркнуть, что такой способ обхода трудности существенно опирается на возможность разложения некоторых функций (в данном случае функции  $G(x)$ ) в ряды. В квантовой теории поля такая возможность всегда имеется при вычислениях по теории возмущений (по диаграммам Фейнмана). При любых попытках выйти за рамки теории возмущений неоднозначность определения функциональных интегралов сразу становится существенной, и действительно с этой неоднозначностью связаны интересные физические явления (см., например, [14]).

## § 2. Применение общих формул к гармоническому осциллятору

Применим общие определения, данные в предыдущем параграфе, к случаю гармонического осциллятора, и на этом примере обсудим некоторые тонкости, связанные с их применением. Начнем со случая свободной частицы, которую можно рассматривать как осциллятор с частотой  $\omega=0$ . В этом случае действие имеет вид

$$S\{x\} = \frac{m}{2} \int_0^{\tau} dt \dot{x}^2. \quad \text{Чтобы применить общее определение, нужно}$$

привести его к виду  $(x, Bx)$ , где скалярное произведение выражается через интеграл по  $t$ , а  $B$  — некоторый линейный оператор. Для этого можно использовать интегрирование по частям. Но чтобы можно было отбрасывать возникающие при этом граничные члены, желательно, чтобы граничные значения для пути были равны нулю. В гл. 2 § 4 мы уже использовали разбиение пути на две части, одна из которых имеет нулевые граничные условия. Применим этот прием еще раз. Положим  $x = \eta + z$ , где  $\dot{\eta} = 0$ ,  $\eta(0) = x$ ,  $\eta(\tau) = x'$ . Тогда путь  $z$  имеет нулевые граничные значения, и для него действие можно записать в виде квадратичной формы. В результате имеем

$$\int dx e^{\frac{i}{\hbar} S\{x\}} = e^{\frac{i}{\hbar} S\{\eta\}} \int dz e^{-\frac{i}{2\hbar} (z, Bz)},$$

где обозначено  $B = m(d^2/dt^2)$ . По общей формуле (А.7), гауссов функциональный интеграл по  $z$  равен единице, так что получаем

$$\int dx e^{\frac{i}{\hbar} S\{x\}} = e^{\frac{i}{\hbar} S\{\eta\}}. \quad (\text{А.11})$$

Сравнивая это выражение с формулой (3.5) гл. 2, мы видим, что функциональный интеграл, определенный формулой (А.11),



отличается от того, который был определен в гл. 2 § 3, численным множителем:

$$\int d\{x\} = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \tau}\right)^{1/2} \int dx. \quad (\text{A.12})$$

Во избежание недоразумений это следует всегда помнить.

Перейдем к случаю гармонического осциллятора с действием  $S\{x\} = \frac{m}{2} \int_0^\tau dx (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$ . Выделяя классическую часть пути, удовлетворяющую условиям (4.1) гл. 2, можно привести интеграл по путям к гауссову виду

$$\int dx e^{\frac{i}{\hbar} S\{x\}} = e^{\frac{i}{\hbar} S\{\eta\}} \int dz e^{-\frac{i}{2\hbar} (z, B_\omega z)},$$

где теперь

$$B_\omega = m \left( \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right).$$

Для фигурирующего здесь интеграла по  $z$  общая формула (A.7) опять дает единицу, так что мы опять получаем для интеграла по  $x$  выражение (A.11) (конечно, классическое действие  $S\{\eta\}$  теперь уже должно вычисляться с учетом частоты  $\omega$ , но этим отличия и исчерпываются). Сравнивая с формулой (4.9) гл. 2, мы видим, что теперь отличие меры (A.8) от меры, определенной в § 3, гл. 2 иное:

$$\int d\{x\} = \left( \frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega \tau} \right)^{1/2} \int dx. \quad (\text{A.13})$$

На первый взгляд формулы (A.12) и (A.13) противоречат друг другу. Это кажущееся противоречие возникает из-за того, что мера  $dx$  в формуле (A.12) определена с помощью оператора  $B$ , тогда как в формуле (A.13) через  $dx$  обозначена уже другая мера. Это очень важное обстоятельство очевидно из формулы (A.8). При работе с гауссовыми функциональными интегралами всегда следует помнить, что мера в них определена по отношению к квадратичной форме, стоящей в экспоненте, и при изменении квадратичной формы меняется мера. Если меру, соответствующую оператору  $B_\omega$ , обозначить через  $d_\omega x$ , то отношение двух мер определяется отношением соответствующих (бесконечных) детерминантов:

$$\frac{d_\omega x}{dx} = \left( \frac{\det \frac{B_\omega}{2\pi}}{\det \frac{B}{2\pi}} \right)^{-1/2} = \left( \det \frac{B_\omega}{B} \right)^{-1/2}. \quad (\text{A.14})$$

Используя определения операторов  $B$  и  $B_\omega$ , нетрудно найти отношение мер, вычисляя бесконечный детерминант. Детерминанты, стоящие в числителе и знаменателе формулы (A.14), оба расходятся (их расходимость как

рав компенсируют расходимости меры  $\prod_i dx(t)$ . Но детерминант отношения этих операторов конечен. Это отношение равно

$$\frac{B_\omega}{B} = 1 + \omega^2 R, \quad R = \left( \frac{d^2}{dt^2} \right)^{-1}.$$

Записывая оператор  $R$  в виде интегрального оператора

$$(Rf)(t) = \int_0^\tau dt' R(t, t') f(t'),$$

получим для его ядра уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2} R(t, t') = \delta(t - t'), \quad 0 \leq t, t' \leq \tau,$$

где  $\delta(t - t')$  — дельта-функция Дирака, определяемая условием

$$\int_0^\tau dt' \delta(t - t') f(t') = f(t).$$

Говорят, что двухточечная функция  $R(t, t')$ , удовлетворяющая этому уравнению, является функцией Грина уравнения  $\xi = f$ . Но уравнение определяет эту функцию неоднозначно. Чтобы устранить неоднозначность, вспомним, что мы сейчас все вычисления проводим в пространстве путей с нулевыми граничными условиями  $z(0) = z(\tau) = 0$ . Нам пришлось ограничиться только этим пространством для того, чтобы действие можно было записать в виде квадратичной формы  $-\frac{1}{2}(z, B_\omega z)$ . Поэтому к оператору  $R$  следует предъявить требование, чтобы любую функцию  $f$  он переводил в рассматриваемое нами пространство. Для этого должны выполняться граничные условия

$$R(0, t') = R(\tau, t') = 0.$$

Таким образом, ядро оператора  $R$  — это функция Грина уравнения  $\xi = f$  с нулевыми граничными условиями.

Ядро  $R(t, t')$  нетрудно найти с помощью разложения в ряд Фурье вида (4.5), гл. 2. При этом получается

$$R(t, t') = -\frac{2}{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Q_n^2} \sin Q_n t \sin Q_n t'.$$

Пользуясь ортогональностью функций  $\sin Q_n t$  на отрезке  $[0, \tau]$ , нетрудно показать теперь, что степени оператора  $R$  имеют ядра следующего вида:

$$(R^k f)(t) = \int_0^\tau dt' R^k(t, t') f(t'),$$

$$R^k(t, t') = (-1)^k \frac{2}{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Q_n^{2k}} \sin Q_n t \sin Q_n t'.$$

По этим ядрам легко найти следы соответствующих операторов:

$$\text{Tr } R^k = \int_0^\tau dt R^k(t, t) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Q_n^{2k}}.$$



Теперь мы можем использовать для определения детерминанта формулы (А.9)<sub>\*</sub> (А.10). Имеем

$$\ln \det \frac{B_{\omega}}{B} = \ln \det (1 + \omega^2 R) = -\text{Tr} [\omega^2 R - \frac{1}{2} \omega^4 R^2 + \frac{1}{3} \omega^6 R^3 - \dots] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\omega^2}{Q_n^2} + \frac{1}{2} \frac{\omega^4}{Q_n^4} + \frac{1}{3} \frac{\omega^6}{Q_n^6} + \dots \right).$$

Воспользуемся еще раз формулой (А.10) для разложения логарифма. Тогда это выражение можно привести к виду

$$-\ln \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\omega^2}{Q_n^2} \right).$$

Возникающее таким образом бесконечное произведение вычисляется по формуле Эйлера (формула (4.7) из главы 2), что дает

$$\frac{d_{\omega} x}{dx} = \left( \det \frac{B_{\omega}}{B} \right)^{-1/2} = \left( \frac{\omega \tau}{\sin \omega \tau} \right)^{-1/2}. \quad (\text{А.15})$$

Это и объясняет разницу между формулами (А.12) и (А.13).

Из всего сказанного можно сделать следующий вывод: в формуле (А.7) мера  $dx$  определяется по отношению к заданной квадратичной форме, т.е. по отношению к заданному оператору. Это явно видно из формулы (А.8). Поэтому если мы меняем квадратичную форму, то следует помнить, что может появиться дополнительный численный множитель. Это бывает важно, в частности, если часть действия учитывается непосредственно в квадратичной форме —  $\frac{1}{2}(x, Bx)$ , а другая часть — с помощью функции  $G(x)$ . Такое разделение на «свободный лагранжиан» и «лагранжиан взаимодействия» до некоторой степени произвольно. Поэтому можно перейти к другому разделению, изменив квадратичную форму. При этом может появиться дополнительный численный множитель в определении меры. В частности, при вычислении интеграла по путям для осциллятора мы включили потенциальную энергию  $\frac{1}{2} m \omega^2 x^2$  в квадратичную форму, получив в результате меру  $d_{\omega} x$ . Это удобно. Однако в принципе можно считать потенциальную энергию взаимодействием, определяя меру только через кинетическую энергию. Это соответствует тому, что интеграл по путям для осциллятора будет вычисляться по отношению к мере  $dx$ , характерной для свободной частицы. При этом, как мы выяснили, интеграл по путям будет отличаться лишь на конечный множитель (А.15). Часто численный множитель вообще несуществен. Это имеет место в приложениях, рассмотренных в гл. 3 и 4.

Возвращаясь к анализу интеграла по путям для осциллятора, мы будем далее в этом параграфе пользоваться мерой  $d_{\omega} x$ , а поэтому индекс будем опускать. При этом связь с мерой, введенной в § 3, гл. 2, описывается формулой (А.13).

Рассмотрим интеграл по путям для осциллятора, находящегося под действием произвольной внешней силы. Действие для него имеет вид (4.4), гл. 2. Выделяя классический путь  $\gamma$ , удовлетворяющий условиям (4.1), гл. 2, перейдем к интегрированию по путям с нулевыми граничными условиями:

$$\int dx e^{\frac{i}{\hbar} S(x)} = e^{\frac{i}{\hbar} S(\gamma)} \int d\mathbf{x} e^{-\frac{i}{2\hbar} (x, B_{\omega} x) + \frac{i}{\hbar} (F, x)}.$$

Остающийся интеграл по  $x$  вычисляется сразу по формуле (A.7). Это дает

$$\int dx e^{\frac{i}{\hbar} S(x)} = e^{\frac{i}{\hbar} S(\gamma)} e^{\frac{i}{2\hbar} (F, B_{\omega}^{-1} F)}. \quad (\text{A.16})$$

Остается, следовательно, найти оператор  $B_{\omega}^{-1}$ . Это очень легко сделать. Оператор  $B_{\omega}$  сопоставляет каждой классической траектории  $\zeta(t)$  силу  $F(t)$ , под действием которой осциллятор двигался бы по такой траектории. Обратный оператор  $B_{\omega}^{-1}$ , наоборот, каждой силе должен сопоставлять траекторию осциллятора, движущегося под действием этой силы. Другими словами, это оператор, который позволяет решить дифференциальное уравнение для движения осциллятора. Но решение, как известно, неоднозначно, и следует задать граничные условия для того, чтобы определить единственное решение или, что то же, единственный оператор  $B_{\omega}^{-1}$ . В нашем случае, когда интеграл берется лишь по путям с нулевыми граничными условиями и действие определено как квадратичная форма именно на таких путях, следует наложить нулевые граничные условия. Окончательно имеем для  $B_{\omega}^{-1}$  такое определение в терминах разложения Фурье (4.5) гл. 2:

$$\zeta(t) = (B_{\omega}^{-1} F)(t) = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{\omega^2 - \Omega_n^2} \sin \Omega_n t.$$

Квадратичная форма  $(F, B_{\omega}^{-1} F)$  также легко вычисляется:

$$(F, B_{\omega}^{-1} F) = (F, \zeta) = \frac{\tau}{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n^2}{\omega^2 - \Omega_n^2}.$$

При подстановке в (A.16) это дает окончательно для функционального интеграла

$$\int dx e^{\frac{i}{\hbar} S(x)} = e^{\frac{i}{\hbar} S(\xi)},$$

где  $\xi$  — классическая траектория осциллятора, движущегося под действием заданной силы с заданными (ненулевыми) граничными условиями (4.8) гл. 2. С учетом соотношения между мерами (A.13) это совпадает с ранее найденным выражением (4.9) гл. 2.



## Б. СОСТОЯНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ КАК СЕЧЕНИЯ ПРИСОЕДИНЕННОГО РАССЛОЕНИЯ

Мы определим в этом приложении присоединенное расслоенное многообразие и введем волновые функции (калибровочно-) заряженных частиц как сечения присоединенного расслоения. В главе 5, § 4, было показано, что заряженные частицы можно описывать функциями на главном расслоенном многообразии. Поэтому вводить (как это делают математики) присоединенное расслоение и сечение присоединенного расслоения кажется излишним. Мы определим здесь эти понятия лишь для полноты изложения.

Определим *присоединенное расслоенное многообразие*  $\mathcal{V}(\mathcal{X}, \mathcal{L}, G, \mathcal{P})$  с базой  $\mathcal{X}$ , стандартным слоем  $\mathcal{L}$ , присоединенное к главному расслоенному многообразию  $\mathcal{P}$  со структурной группой  $G$ . Пусть дано линейное пространство  $\mathcal{L}$  и на нем действует представление  $U$  группы  $G$ . Для наглядности начнем опять с области  $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ , над которой расслоение  $\mathcal{P}$  тривиализуется. Любая точка  $p \in \pi^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{P}$  представляется в виде пары  $p = (x, g)$ , где  $x = \pi(p)$ ,  $g \in G$ . Теперь в нашем распоряжении есть пространство  $\mathcal{L}$  и мы будем рассматривать пары вида  $v = (x, \lambda)$ ,  $\lambda \in \mathcal{L}$ . Такие пары и будут составлять расслоение  $\mathcal{V}$  (над той областью, где оно тривиализуется). Однако, чтобы перенести некоторые структуры, уже определенные в  $\mathcal{P}$ , в новое расслоение (главным образом это касается понятия связности), будем рассматривать наряду с парой  $(x, \lambda)$  еще и все пары  $(x, U(g)\lambda)$ ,  $g \in G$ . Ясно, что пара  $v = (x, U(g)\lambda)$  есть точка интересующего нас расслоения  $\mathcal{V}$ . Эта точка задается тремя элементами  $x \in \mathcal{X}$ ,  $g \in G$  и  $\lambda \in \mathcal{L}$ . Но если последние два элемента мы изменим согласованным образом,  $g \mapsto gg_1$ ,  $\lambda \mapsto U(g_1^{-1})\lambda$ , то  $v$  не изменится. Значит, точку  $v$  расслоения можно рассматривать как тройку из прямого произведения  $\mathcal{U} \times G \times \mathcal{L}$ , и при этом некоторые тройки следует отождествить. Это и приводит к общему абстрактному определению.

Рассмотрим прямое произведение  $\mathcal{P} \times \mathcal{L}$ . Элементами его являются пары  $(p, \lambda)$ . Определим на этом пространстве действие группы  $G$  следующим образом:

$$g: (p, \lambda) \mapsto (pg, U(g^{-1})\lambda). \quad (\text{Б.1})$$

Мы воспользовались тем, что уже определено действие группы на  $\mathcal{P}$  справа  $p \mapsto pg$  и действие ее на  $\mathcal{L}$  слева  $\lambda \mapsto U(g)\lambda$ . На основании этих определений мы определили действие группы на пары. Теперь факторизуем наше пространство по группе и получим искомое расслоение:  $\mathcal{V} = (\mathcal{P} \times \mathcal{L})/G$ . Более подробно, пары, отличающиеся действием группы (Б.1), называются эквивалентными и затем производится факторизация по этому отношению эквивалентности. Нетрудно проследить, что в случае, если расслоение  $\mathcal{P}$  (может быть не над всей базой) тривиализуется, это определение сводится к тому, которое рассматривалось в предыдущем абзаце.

Важно понимать, что элемент расслоения  $\mathcal{V}$  — это в сущности пара  $(x, \lambda)$ ,  $x \in \mathcal{X}$ ,  $\lambda \in \mathcal{L}$ . Именно по этой причине пространство  $\mathcal{L}$  называется стандартным слоем присоединенного расслоения  $\mathcal{V}$ .

Чтобы факторизацию, использованную для определения  $\mathcal{V}$ , сделать более наглядной, упростим несколько обозначения. Во-первых, вместо  $U(g)$  будем писать  $g$ , так что действие группы на линейном пространстве  $\mathcal{L}$  будем обозначать  $g: \lambda \mapsto g\lambda$ . Это не приводит к недоразумениям, потому что если известно, к какому пространству принадлежит  $\lambda$ , то известно, каким способом на него должна действовать группа. Теперь условимся вместо  $(p, \lambda)$  элемент произведения  $\mathcal{P} \times \mathcal{L}$  обозначать просто  $p\lambda$ . Тогда факторизация учитывается автоматически. Действительно, сами обозначения наталкивают на следующую цепочку преобразований:  $(pg)(g^{-1}\lambda) = p(gg^{-1})\lambda = p\lambda$ . Итак, элементы присоединенного расслоения  $\mathcal{V}$  — это пары вида  $p\lambda$ ,  $p \in \mathcal{P}$ ,  $\lambda \in \mathcal{L}$ .

Если зафиксировать  $p$  и менять  $\lambda \in \mathcal{L}$ , то  $p\lambda$  пробегает слой  $\mathcal{V}_x$  над точкой  $\pi(p)$ . Следовательно,  $p$  можно рассматривать как отображение стандартного слоя  $\mathcal{L}$  на конкретный слой  $\mathcal{V}_x$  над точкой  $\pi(p)$ . Разные элементы  $p$  над одной и той же точкой  $x$  будут осуществлять разные отображения  $\mathcal{L}$  на  $\mathcal{V}_x$ . Обозначение  $v = p\lambda$ , таким образом, становится не просто формальным, но приобретает более глубокий смысл:  $p$  действует на  $\lambda$  как отображение  $p: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{V}_x$ .

Теперь все готово для того, чтобы определить связность в присоединенном расслоении. Дело в том, что связность в расслоении  $\mathcal{V}$  трудно определить непосредственно. Зато она немедленно переносится из  $\mathcal{P}$ . То есть по известной связности в  $\mathcal{P}$  определяется связность в присоединенном к нему расслоении  $\mathcal{V}$ . Определить связность в расслоении  $\mathcal{V}$  — значит определить в каждой из его точек горизонтальные направления (подпространство горизонтальных векторов). При этом определяется семейство горизонтальных кривых, операция лифта кривой с базы в расслоение и операция параллельного переноса. Но в данном случае проще начать с конца и определить семейство горизонтальных кривых. Тогда по ним можно определить горизонтальные направления.

Поскольку каждую точку расслоения  $\mathcal{V}$  можно представить в виде  $v = p\lambda$ , где  $p \in \mathcal{P}$ ,  $\lambda \in \mathcal{L}$ , постольку кривую в  $\mathcal{V}$  можно записать в виде  $v(\tau) = p(\tau)\lambda(\tau)$ . *Горизонтальной кривой* называется такая, которая представима в виде  $v(\tau) = p(\tau)\lambda_0$ , где  $\lambda_0 \in \mathcal{L}$  — фиксированный вектор, а  $p(\tau)$  — горизонтальная кривая в главном расслоенном многообразии  $\mathcal{P}$ . Для горизонтальной кривой  $p(\tau)$  мы имеем уравнение (3.10) гл. 5. Вспоминая, что точку  $v \in \mathcal{V}$  можно представить в виде пары  $v = (x, \lambda)$ , запишем горизонтальную кривую  $v(\tau)$  как  $(x(\tau), \lambda(\tau))$  или, более подробно,  $v(\tau) = (x^\mu(\tau), \lambda_\alpha(\tau))$ , где  $\lambda_\alpha(\tau)$  — компоненты вектора  $\lambda(\tau)$  в некотором базисе, которые могут служить координатами в расслоении  $\mathcal{V}$ . Если  $p(\tau) = (x(\tau), g(\tau))$ , то  $v(\tau) = (x(\tau), g(\tau)\lambda_0)$ . Поэтому  $\lambda(\tau) = g(\tau)\lambda_0$ , и уравнение (3.10) гл. 5 немедленно дает уравнение для  $\lambda(\tau)$ .



В этом пункте следует вспомнить, что мы упростили обозначения, записывая  $g\lambda$  вместо  $U(g)\lambda$ . На самом деле в пространстве  $\mathcal{L}$  действует не сама группа  $G$ , состоящая из матриц  $g = \{g_{\alpha\beta}\}$ , а ее представление  $U(G)$ . Поэтому прежде чем написать уравнение для  $\lambda(\tau)$ , следует из уравнения (3.10) гл. 5 для  $g(\tau)$  получить уравнение для  $U(g(\tau))$ . Это легко сделать, если обратиться к решению уравнения (3.10) гл. 5, записанному в форме  $P$  — экспоненты (3.11) гл. 5. В этом равенстве фигурируют только элементы группы. Сама упорядоченная экспонента представляет собой бесконечное произведение элементов группы, бесконечно близких к единице. Поэтому, используя свойство представления  $U(gg') = U(g)U(g')$ , можно от (3.11) гл. 5 перейти к формуле

$$U(g(\tau)) = P \exp \left( i \int_0^\tau d\tau' \dot{x}^\mu(\tau') A_\mu^a(x(\tau')) T_a \right) U(g(0)), \quad (\text{Б.2})$$

где через  $T_a$  обозначено представление алгебры Ли, соответствующее представлению группы  $U(g)$  и определяемое условием

$$U(e^{i\chi^a T_a}) = e^{i\chi^a T_a}. \quad (\text{Б.3})$$

Операторнозначная функция (Б.2) удовлетворяет, очевидно, уравнению

$$\frac{d}{d\tau} U(g(\tau)) - i \dot{x}^\mu(\tau) A_\mu^a(x(\tau)) T_a U(g(\tau)) = 0.$$

Поэтому функция  $\lambda(\tau) = U(g(\tau)) \lambda$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(\tau) - i \dot{x}^\mu(\tau) A_\mu^a(x(\tau)) T_a \lambda(\tau) &= 0; \\ \lambda(0) &= \lambda_0. \end{aligned} \quad (\text{Б.4})$$

Решение этого уравнения, выражающееся через упорядоченную экспоненту, имеет вид  $\lambda(\tau) = U(g(\tau)) \lambda_0$ , где  $U(g(\tau))$  выражается формулой (Б.2). Теперь можно получить явный вид горизонтальных векторов в расслоении  $\mathcal{Y}$ . Действительно, кривые, удовлетворяющие уравнению (Б.4), в каждой точке горизонтальны. Значит, горизонтальные векторные поля натягиваются на следующий базис:

$$\mathcal{D}_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + i A_\mu^a T_a, \lambda_r, \frac{\partial}{\partial \lambda_r}. \quad (\text{Б.5})$$

Пока мы не ввели в рассмотрение объекта, который в калибровочной теории фигурирует как волновая функция заряженной частицы  $\psi(x)$ . Это функция, сопоставляющая каждой точке  $x \in \mathcal{X}$  вектор из пространства  $\mathcal{L}$  (в котором действует представление  $U(G)$ ). Теперь уже ясно, что для того, чтобы получить такой объект, необходимо ввести в рассмотрение сечение присоединенного расслоения  $\mathcal{Y}$ . Действительно, сечение этого расслоения  $\sigma$  сопоставляет каждой точке  $x \in \mathcal{X}$  точку расслоения  $v \in \mathcal{Y}_x$  в слое над  $x$ , т. е. пару  $v = (x, \lambda)$ , где  $\lambda \in \mathcal{L}$ . Если вектор  $\lambda$ , соответ-

ствующий точке  $x$ , обозначить через  $\psi(x) \in \mathcal{L}$ , то сечение имеет вид

$$\sigma: x \mapsto (x, \psi(x)), \quad \psi(x) \in \mathcal{L}.$$

Таким образом, выбор сечения расслоения  $\sigma$  определяет функцию  $\psi(x)$  со значениями в  $\mathcal{L}$  и наоборот. Так получается функция нужной нам структуры. Если в качестве  $\mathcal{X}$  выбрать пространственно-временное многообразие, а в качестве  $G$  — группу симметрии частиц, то  $\psi(x)$  — волновая функция калибровочно заряженной частицы.

В нашем распоряжении есть дифференциальный оператор  $\mathcal{D}_\mu$ , определенный формулой (Б.5) и действующий в расслоенном многообразии  $\mathcal{V}$ . Можно ли естественным образом определить его действие на сечение этого расслоенного многообразия? Нетрудно понять, что можно. Действительно, дифференциальный оператор (Б.5) есть векторное поле в расслоении  $\mathcal{V}$ , т. е. поле направлений. Если все точки сечения сдвинуть в тех направлениях (горизонтальных), которые определены этим полем, то получится новое сечение. Формально это сопоставление можно провести таким образом. Сворачивая операторы  $\mathcal{D}_\mu$  с некоторым набором чисел  $\xi^\mu$ , построим дифференциальный оператор  $\xi^\mu \mathcal{D}_\mu$ . Он представляет собой также горизонтальное векторное поле. По нему можно построить (так, как это делалось в § 2 гл. 5) оператор  $R^*(\xi) = \exp(\xi^\mu \mathcal{D}_\mu)$ . Этот оператор действует в пространстве функций на  $\mathcal{V}$ , сдвигая аргумент этих функций. Чтобы выразить это явно, введем соответствующий оператор сдвига  $R(\xi): \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  так, что

$$R^*(\xi) F(v) = F(R(\xi)v). \quad (\text{Б.6})$$

Этим оператором можно подействовать на точки сечения  $\sigma$ . Каждая точка этого сечения сдвинется в горизонтальном направлении, в результате чего образуется новое сечение  $\sigma'$ . Старое сечение задавалось парами  $(x, \psi(x))$ . Новое сечение также будет задаваться парами  $(x, \psi'(x))$  с какой-то новой функцией  $\psi': \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{L}$ . Таким образом, задание набора чисел  $\xi^\mu$  определяет сдвиг расслоения и тем самым преобразование функции  $\psi(x)$  (сечения расслоения). Смысл чисел  $\xi^\mu$  состоит в том, что когда они бесконечно малы, то задают изменение координат  $x^\mu$  при сдвиге расслоения:

$$R(\delta x): (x^\mu, \lambda) \mapsto (x^\mu + \delta x^\mu, \lambda + i\delta x^\mu A_\mu^\alpha T_\alpha \lambda). \quad (\text{Б.7})$$

Следовательно, при сдвиге  $R(\delta x)$  пара  $(x - \delta x, \psi(x - \delta x))$ , соответствующая сечению  $\sigma$  перейдет в пару  $(x, \psi'(x))$ , соответствующую сечению  $\sigma'$ . Отсюда, используя формулу (Б.7), можно вывести закон преобразования  $\psi \mapsto \psi'$  под действием сдвига  $R(\delta x)$ . Обозначим оператор этого преобразования через  $R^\sharp(\delta x)$ . Он имеет вид

$$(R^\sharp(\delta x)\psi)(x) = \psi'(x) = e^{-\delta x^\mu \nabla_\mu} \psi(x), \quad (\text{Б.8})$$



где обозначено

$$\nabla_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - i A_\mu^a T_a. \quad (\text{Б.9})$$

Заметим, что формула (Б.8) справедлива лишь для бесконечно малого приращения координат  $\delta x^\mu$ . Оператор конечного сдвига можно выразить через  $P$ -экспоненту.

Таким образом, мы получили ковариантную производную  $\nabla_\mu$ , характерную для калибровочной теории, как характеристику связности в присоединенном расслоении, в то время как состояния калибровочно заряженной частицы описываются сечениями этого расслоения. При таком способе описания калибровочного поля и заряженных частиц пространство внутренних степеней свободы или «зарядовое пространство»  $\mathcal{L}$  появляется как стандартный слой расслоения (вместо калибровочной группы  $G$ , являющейся стандартным слоем в главном расслоении). Однако необходимость, кроме главного расслоения, оперировать еще с присоединенным усложняет математический аппарат. Этого можно избежать, описывая состояния заряженных частиц функциями на главном расслоении, как это сделано в § 4 гл. 5. На наш взгляд, такой способ описания частиц является более простым. Еще одна возможность состоит в том, чтобы рассматривать пространство состояний заряженной частицы как пространство-носитель индуцированного представления группы путей (§§ 7, 8 гл. 6).

## ЛИТЕРАТУРА

### *Общие и математические вопросы в квантовой физике*

(Квантовая механика и квантовая теория поля [1—10]; функциональные интегралы [11—20]; функциональный анализ и линейная алгебра [21—25]; дифференциальная геометрия и топология [26—31]; метод индуцированных представлений и близкие теоретико-групповые методы [32—43])

1. Дирак П. А. М. Принципы квантовой механики. — М.: Наука, 1980.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. — М.: Физматгиз, 1963.
3. Фон Нейман И. Математические основы квантовой механики. — М.: Наука, 1964.
4. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Квантованные поля. — М.: Наука, 1980.
5. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. — 2-е изд. — М.: Наука, 1973.
6. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. — М.: Наука, 1969.
7. Газизорович С. Физика элементарных частиц. — М.: Наука, 1969.
8. Dirac P. A. M. — *Fields and Quanta*, 1972, v. 3, p. 139.
9. Feynman R. — *Phys. Rev.*, 1951, v. 84, p. 108.
10. Schwinger J. — *Phys. Rev.*, 1951, v. 82, p. 664. Перевод в сб.: Новейшее развитие квантовой электродинамики. — М.: ИЛ, 1954.
11. Feynman R. P. — *Reviews of Modern Phys.*, 1948, v. 20, p. 367. Перевод в сб.: Вопросы причинности в квантовой механике. — М.: ИЛ, 1955.
12. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. — М.: Мир, 1968.
13. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. — М.: Мир, 1965.
14. Васильев А. Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1976.
15. Marinov M. S. — *Phys. Reports*, 1980, v. 60, p. 1.
16. Гельфанд И. М., Яглом А. М. — *УМН*, 1956, т. 11, с. 77.
17. De Witt-Morette C., Maheshwari A., Nelson B. — *Phys. Reports*, 1979, v. 50, p. 255.
18. Clarke C. J. S. — *Commun. math. Phys.*, 1977, v. 56, p. 125.
19. De Witt B. S. — *Reviews of Modern Phys.*, 1957, v. 29, p. 377.
20. Garrod C. — *Reviews of Modern Phys.*, 1966, v. 38, p. 483.
21. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. — М.: Мир, 1977 (том 1), 1978 (том 2).
22. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. — М.: Физматгиз, 1961. — (Сер. «Обобщенные функции», т. 4).
23. Функциональный анализ/ Виленкин Н. Я., Горин Е. А., Костюченко А. Г. и др. Под ред. С. Г. Крейна. — М.: Наука, 1964. — (Справочная математическая библиотека).
24. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. — М.: Физматгиз, 1959.



25. Высшая алгебра: Линейная алгебра, многочлены, общая алгебра/ Мишина А. П., Проскуряков И. В. Под ред. П. К. Рашевского. — М.: Физматгиз, 1962. — (Справочная математическая библиотека).
26. Номидзу К. Группы Ли и дифференциальная геометрия. — М.: ИЛ, 1960.
27. Бишоп Р. Л., Криттенден Р. Дж. Геометрия многообразий. — М.: Мир, 1967.
28. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1970.
29. Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. — М.: Мир, 1967.
30. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. — М.: Наука, 1979.
31. Введение в топологию / Борисович Ю. Г., Близняков Н. М., Израилевич Я. А., Фоменко Т. Н. — М.: Высшая школа, 1980.
32. Mackey G. W. Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics. — N. Y. — Amsterdam: W. A. Benjamin, inc.; Torino: Editore Boringhieri, 1968.
33. Coleman A. J. — In: Group Theory and Its Applications/ Ed. by E. M. Loeble. — N. Y.—L.: Acad. Press, 1968, p. 57.
34. Барут А. О., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. — М.: Мир, 1980, т. 2.
35. Кириллов А. А. Элементы теории представлений. — М.: Наука, 1972.
36. Mensky M. B. — Commun. math. Phys., 1976, v. 47, p. 97.
37. Менский М. Б. Метод индуцированных представлений: пространство-время и концепция частиц. М.: Наука, 1976.
38. Переломов А. М. — УФН, 1977, т. 123, с. 23.
39. Scutaru H. — Lett. Math. Phys., 1977, v. 2, p. 101.
40. Castrigiano D. P. L., Henrichs R. W. — Lett. Math. Phys., 1980, v. 4, p. 169.
41. Малкин И. А., Манько В. И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. — М.: Наука, 1979.
42. Dodonov V. V., Malkin I. A., Man'ko V. I. — Int. J. Theor. Phys., 1975, v. 14, p. 37.
43. Wechler W. — Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden, 1967, v. 16, p. 885.

#### Квантовая теория измерений

(Квантовые эффекты в прецизионных измерениях [44—60]; Общие вопросы квантовой теории измерений [61—85])

44. Брагинский В. Б. — ЖЭТФ, 1967, т. 53, с. 1434.
45. Брагинский В. Б., Назаренко В. С. — ЖЭТФ, 1969, т. 57, с. 1421.
46. Брагинский В. Б. Физические эксперименты с пробными телами. — М.: Наука, 1970.
47. Брагинский В. Б., Воронцов Ю. И. — УФН, 1974, т. 114, с. 41.
48. Брагинский В. Б. — УФН, 1977, т. 122, с. 164.
49. Брагинский В. Б., Воронцов Ю. И., Халили Ф. Я. — ЖЭТФ, 1977, т. 73, с. 1340.
50. Брагинский В. Б., Воронцов Ю. И., Халили Ф. Я. — Письма в ЖЭТФ, 1978, т. 27, с. 296.
51. Гусев А. В., Руденко В. Н. — ЖЭТФ, 1978, т. 74, с. 819.
52. Moncrief V. — Ann. Phys., 1978, v. 114, p. 201.
53. Von Roos O. — Phys. Rev., 1978, v. D18, p. 4796.
54. Thorne K. S., Drever R. W. P., Caves C. M. et al. — Phys. Rev. Lett., 1978, v. 40, p. 667.
55. Unruh W. G. — Phys. Rev., 1978, v. D17, p. 1180.
56. Unruh W. G. — Phys. Rev., 1978, v. D18, p. 1764.
57. Гусев А. В., Руденко В. Н. — ЖЭТФ, 1979, т. 76, с. 1488.
58. Unruh W. G. — Phys. Rev., 1979, v. D19, p. 2888.
59. Додонов В. В., Манько В. И., Руденко В. Н. — ЖЭТФ, 1980, т. 78, с. 881.
60. Грищук Л. П., Сажин М. В. — ЖЭТФ, 1981, т. 80, № 4.
61. Lüders G. — Ann. d. Physik, 1951, v. 8, p. 322.

62. Jauch J. M. — *Helv. Phys. Acta*, 1964, v. 37, p. 293.
63. Мекки Дж. Лекции по математическим основам квантовой механики. — М.: Мир, 1965.
64. Arthurs E., Kelly J. L. — *Bell System Tech. J.*, 1965, v. 44, p. 725.
65. Helstrom C. W. — *IEEE Trans. on Information Theory*, 1968, v. 14, p. 234.
66. Гришанин Б. А., Стратонович Р. Л. — *Пробл. передачи информации*, 1970, т. 6, с. 15.
67. Stratonovich R. L. — *J. of Stochastics*, 1973, v. 1, p. 87.
68. Baumann K. — *Acta Phys. Austr.*, 1975, v. 41, p. 223.
69. Baumann K. — *Acta Phys. Austr.*, 1975, v. 42, p. 73.
70. Srinivas M. D. — *J. Math. Phys.*, 1975, v. 16, p. 1672.
71. Levy-Leblond J.-M. — *Dialectica*, 1976, v. 30, p. 161.
72. Piron C. *Foundations of Quantum Mechanics*. — Mass.: Benjamin Reading, 1976.
73. Davis M. — *Int. J. Theor. Phys.*, 1977, v. 16, p. 867.
74. d'Espagnat B. — *Phys. Rev.*, 1978, v. D18, p. 349.
75. Srinivas M. D. — *J. Math. Phys.*, 1978, v. 19, p. 1705.
76. Хелстром К. Квантовая теория проверки гипотез и оценивания. — М.: Мир, 1979.
77. Bub J. — In: *Log-Algebraic Approach Quant. Mech.* — Dordrecht e. a., 1979, v. 2, p. 209.
78. Finkelstein D. — In: *Log-Algebraic Approach Quant. Mech.* — Dordrecht e. a., 1979, v. 2, p. 141. — (Перепечатка из издания 1972 г.).
79. Холев А. С. Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. — М.: Наука, 1980.
80. Peres A. — *Phys. Rev.*, 1980, v. D22, p. 879.
81. Mensky M. B. — *Phys. Rev.*, 1979, v. D20, p. 384.
82. Менский М. Б. — *ЖЭТФ*, 1979, т. 77, с. 1326.
83. Mensky M. B. — In: *Abstracts of Contributed Papers*, 9th Intern. Conf. on Gen. Rel. and Gravitation (Jena, 1980). — Jena, 1980, v. 2, p. 426.
84. Гельфанд Я. М., Любошиц В. Л., Подгорецкий М. И. Парадокс Гиббса и тождественность частиц в квантовой механике. — М.: Наука, 1975.
85. De Muynck W. M. — *Int. J. Theor. Phys.*, 1975, v. 14, p. 327.

#### Калибровочная теория и гравитация

(Некоторые вопросы калибровочной теории и электродинамики [86—115]; некоторые вопросы гравитации [116—128]; магнитные, калибровочные и гравитационные монополи [129—145])

86. Yang C. N., Mills R. L. — *Phys. Rev.*, 1954, v. 96, p. 191. Перевод в сб. [90].
87. Utiyama R. — *Phys. Rev.*, 1956, v. 101, p. 1597. Перевод в сб. [90].
88. Sakurai J. J. — *Ann. Phys.*, 1960, v. 11, p. 1. Перевод в сб. [90].
89. Kibble T. W. B. — *J. Math. Phys.*, 1961, v. 2, p. 212. Перевод в сб. [90].
90. Элементарные частицы и компенсирующие поля: Сб. статей, пер. с англ./ Под ред. Д. Д. Иваненко. — М.: Мир, 1964.
91. Коноплева Н. П., Попов В. Н. Калибровочные поля. — М.: Атомиздат, 1972.
92. Coleman S. — In: *Laws of Hadronic Matter* / Ed. by A. Zichichi. — Acad. Press, 1975. Перевод в сб. [95].
93. Bernstein J. — *Reviews of Modern Phys.*, 1974, v. 46, p. 7. Перевод в сб. [95].
94. Abers E. S., Lee B. W. — *Phys. Reports*, 1973, v. 9, p. 1. Перевод в сб. [95].
95. Квантовая теория калибровочных полей: Сб. статей, пер. с англ./ Под ред. Н. П. Коноплевой. — М.: Мир, 1977.
96. Поляков А. М. — *ЖЭТФ*, 1975, т. 68, с. 1975.
97. Фаддеев Л. Д. — В сб.: *Труды Межд. конф. по мат. пробл. квант. теории поля и квант. статистики (Москва, 1972)*. — Труды МИАН СССР, т. 85. — М.: Наука, 1975.
98. Фаддеев Л. Д. — Письма в *ЖЭТФ*, 1975, т. 21, с. 141.
99. Иванов Е. А., Огиевский В. И. — Письма в *ЖЭТФ*, 1976, т. 23, с. 661.



100. Polyakov A. M. — Nucl. Phys., 1977, v. B120, p. 429.
101. Лезнов А. Н., Манько В. И. — В сб.: Труды Межд. семинара по пробл. физ. высок. энергий и квант. теории поля (Протвино, 1978). — Серпухов, 1978, т. 2, с. 36.
102. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — М.: Наука, 1978.
103. O'Raifeartaigh L. — Rep. Progr. Phys., 1979, v. 42, p. 159.
104. Окунь Л. Б. Лептоны и кварки. — М.: Наука, 1981.
105. Нелина Н. Ф. Калибровочные поля и элементарные частицы. — М.: ВИНТИ, 1980. — (сер. Итоги науки и техники. Теоретич. физ. и физ. элементарных частиц. Том 1).
106. Маринов М. С. — УФН, 1977, т. 121, с. 377.
107. Aharonov Y., Bohm D. — Phys. Rev., 1959, v. 115, p. 485.
108. Martin C. — Lett. Math. Phys., 1976, v. 1, p. 155.
109. Isham C. J. — Proc. R. Soc. Lond., 1978, v. A362, p. 383.
110. Avis S. J., Isham C. J. — Proc. R. Soc. Lond., 1978, v. A363, p. 581.
111. De Witt B. S., Hart C. F., Isham C. J. — Physica, 1979, v. A96, p. 197.
112. Dowker J. S., Banach R. — J. Phys., 1978, v. A11, p. 2255.
113. Дубровин Б. А., Новиков С. П. — ЖЭТФ, 1980, т. 79, с. 1006.
114. Schrader R. — Fortschr. der Physik, 1972, v. 20, p. 701.
115. Кадышевский В. Г. — Физ. элем. частиц и атом. ядра, 1980, т. 11, с. 5.
116. Bichteler K. — J. Math. Phys., 1968, v. 9, p. 813.
117. Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. — М.: Мир, 1977.
118. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. — М.: Мир, 1977, т. 3.
119. Станюкович К. П. Гравитационное поле и элементарные частицы. — М.: Наука, 1965.
120. Hawking S. W. — Phys. Rev., 1976, v. D14, p. 2460. Перевод в сб. [123].
121. De Witt B. S. — Phys. Reports, 1975, v. 19, p. 295. Перевод в сб. [123].
122. Фролов В. П. — УФН, 1976, т. 118, с. 473.
123. Черные дыры: Сб. статей, пер. с англ. — М.: Мир, 1978.
124. Chitre D. M., Hartle J. B. — Phys. Rev., 1977, v. D16, p. 251.
125. Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. — М.: Атомиздат, 1980.
126. Карманов О. Ю., Менский М. Б. — Теор. и мат. физ., 1979, т. 41, с. 245.
127. Карманов О. Ю., Менский М. Б. — Теор. и мат. физ., 1980, т. 42, с. 23.
128. Mensky M. B., Karmanov O. Yu. — Gen. Rel. and Grav., 1980, v. 12, p. 267.
129. Dirac P. A. M. — Proc. Roy. Soc., 1931, v. A133, p. 60.
130. Dirac P. A. M. — Int. J. Theor. Phys., 1978, v. 17, p. 235.
131. Cabibbo N., Ferrari E. — Nuovo Cimento, 1962, v. 23, p. 1147.
132. Ross D. K. — J. Phys., 1974, v. A7, p. 705.
133. Jadczyk A. Z. — Int. J. Theor. Phys., 1975, v. 14, p. 183.
134. Artru X. — Nucl. Phys., 1975, v. B85, p. 442.
135. Recami E., Mignani R. — Phys. Lett., 1976, v. B62, p. 41.
136. Artru X. — Nucl. Phys., 1977, v. B129, p. 7826.
137. Монастырский М. И., Переломов А. М. — Письма в ЖЭТФ, 1975, т. 21, с. 94.
138. Marciano W. J. — Int. J. Theor. Phys., 1978, v. 17, p. 275.
139. Yang C. N. — J. Math. Phys., 1978, v. 19, p. 320.
140. Dowker J. S., Roche J. A. — Proc. Phys. Soc., 1967, v. 92, p. 1.
141. Dowker J. S. — Gen. Rel. and Grav., 1974, v. 5, p. 603.
142. Riegert R. J. — Int. J. Theor. Phys., 1976, v. 15, p. 121.
143. Lubkin E. — Int. J. Theor. Phys., 1977, v. 16, p. 551.
144. Mignani R. — Lett. Nuovo Cimento, 1978, v. 22, p. 597.
145. Mignani R. — Nuovo Cimento, 1980, v. B56, p. 201.

*Путезависимый формализм в калибровочной теории и гравитации*  
(Путезависимый формализм [146—164]; группоид путей и группа путей [165—175])

146. *Mandelstam S.* — *Ann. Phys.*, 1962, v. 19, p. 1.
147. *Mandelstam S.* — *Ann. Phys.*, 1962, v. 19, p. 25.
148. *Bialynicki-Birula I.* — *Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math. astron. et phys.*, 1963, v. 11, p. 135.
149. *Mandelstam S.* — *Phys. Rev.*, 1968, v. 175, p. 1604.
150. *Mandelstam S.* — *Phys. Rev.*, 1968, v. 175, p. 1580.
151. *Wilson K. G.* — *Phys. Rev.*, 1974, v. D10, p. 2445.
152. *Yang C. N.* — *Phys. Rev. Lett.*, 1974, v. 33, p. 445.
153. *Wu T. T., Yang C. N.* — *Phys. Rev.*, 1975, v. D12, p. 3845.
154. *Liggatt P. A. J., Macfarlane A. J.* — *J. Phys.*, 1978, v. G4, p. 633.
155. *'t Hooft G.* — *Nucl. Phys.*, 1978, v. B138, p. 1.
156. *Glimm J., Jaffe A.* — *Nucl. Phys.*, 1979, v. B149, p. 49.
157. *Makeenko Yu. M., Migdal A. A.* — *Phys. Lett.*, 1979, v. B88, p. 135.
158. *Mandelstam S.* — *Phys. Rev.*, 1979, v. D19, p. 2391.
159. *Nambu Y.* — *Phys. Lett.*, 1979, v. B80, p. 372.
160. *Polyakov A. M.* — *Phys. Lett.*, 1979, v. B82, p. 247.
161. *Арефьева И. Я.* — *Теор. и мат. физ.*, 1980, т. 43, с. 111.
162. *Макеенко Ю. М., Мигдал А. А.* — *Ядерная физика*, 1980, т. 32, с. 838.
163. *Aref'eva I. Ya.* — *Phys. Lett.*, 1980, v. B93, p. 347.
164. *Polyakov A. M.* — *Nucl. Phys.*, 1980, v. B164, p. 171.
165. *Süveges M.* — *Acta Phys. Acad. Sci. Hung.*, 1966, v. 20, p. 41; 51; 274.
166. *Süveges M.* — *Acta Phys. Acad. Sci. Hung.*, 1969, v. 27, p. 261.
167. *Mensky M. B.* — *Preprint PIAN*, 1971, No. 140, p. 29. — (Abstract of the report at Int. Sem on Funct. Methods in Quant. Field Theory and Statistics, Moscow, 1971).
168. *Менский М. Б.* — В сб.: *Гравитация: проблемы и перспективы* (памяти акад. А. З. Петрова). — Киев: Наукова думка, 1972, с. 157.
169. *Менский М. Б.* — В сб.: *Проблемы теории гравитации и элементарных частиц*, вып. 7. — Труды ВНИИФТРИ, вып. 16 (46). — М., 1972, с. 73.
170. *Менский М. Б.* — *Теор. и мат. физ.*, 1974, т. 18, с. 190.
171. *Mensky M. B.* — In: *Abstracts of Contributed Papers*, 8th Intern. Conf. on Gen. Rel. and Grav. (Waterloo, 1977). — Waterloo, 1977, p. 251.
172. *Mensky M. B.* — *Lett. Math. Phys.*, 1978, v. 2, p. 175.
173. *Mensky M. B.* — *Lett. Math. Phys.*, 1979, v. 3, p. 513.
174. *Mensky M. B.* — In: *Abstracts of Contributed Papers*, 9th Intern. Conf. on Gen. Rel. and Grav. (Jena, 1980). — Jena, 1980, v. 3, p. 572.
175. *Mensky M. B.* — В сб.: *Теор.-группов. методы в физ. Труды Междунар. семинара, Звенигород, 1979.* — М., 1980, т. II, с. 291.



## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

**Альтернативы** 25, 30, 132  
 — интерферирующие 26  
 — несовместимые 26  
 — , пути как альтернативы 28  
**Амплитуда вероятности** 14, 25, 30, 31, 38  
 «Аппендикс» 22, 116

**Вектор вертикальный** 102  
 — горизонтальный 103  
 — касательный 99  
 — сдвига пути 120  
**Векторное поле** 98  
 — базисное 105, 265, 268, 270  
 — правоинвариантное 105, 106  
 — фундаментальное 103  
**Вероятность** 26, 292  
 — амплитуда 14, 25, 30, 31, 38  
**Внутренние степени свободы** 127, 140, 146, 287  
**Время собственное** 253, 260

**Геометрия обобщенная** 285  
 — псевдориманова 263  
**Глобальные и локальные свойства частиц** 141, 150, 259, 297  
**Гомотопия** 196  
**Граница многообразия** 190  
 — 2-петли 202  
 —  $\pi$ -контура 209  
**Группа голономии** 272, 281, 284, 286  
 — аффинная 275, 282  
 — гомотопий 192  
 — обобщенных (неабелевых) 210  
 — гомотопическая 208  
 — когомологий 193  
 — обобщенных (неабелевых) 210  
 — петель 121, 122, 281  
 — Пуанкаре 128  
 — обобщенная 244, 250, 284  
 — путей 20, 22, 118, 209  
 — фундаментальная 196  
 — 2-петель 202, 287, 296  
 —  $\pi$ -границ 209  
 —  $\pi$ -контуров 209  
 —  $\pi$ -петель 209  
 —  $\pi$ -путей 209  
 —  $\pi$ -циклов 209  
**Группоид путей** 115  
 — 2-путей 200  
 —  $\pi$ -путей 208

**Детерминант оператора** 301  
**Дион калибровочный пробный** 211, 221, 226, 229, 231  
**Длина фундаментальная** 239

**Закрученная частица** 168, 171  
**Заряд калибровочный** 110, 142

**Измерение непрерывное** 15, 31, 64, 69, 290  
**Интеграл неабелевой формы** 202, 206, 210  
 — по путям 13, 35, 42, 292, 298  
 — — , решение уравнения поля 253, 280

**Калибровочное поле** 92, 105, 144, 278  
 — , напряженность 151, 158, 204, 222, 227  
 — обобщенное 294  
 — , 2-калибровочное поле 230  
**Калибровочные преобразования** 92, 147  
**Квантование заряда** 180, 183, 186, 214  
 — поля 286, 295  
**Кварки** 231, 237  
 — , конфайнмент (см. Конфайнмент кварков)  
**Контурные переменные** (см. Экспонента упорядоченная)  
**Конфайнмент кварков** 233, 234  
 — обратный 238

**Лифт векторного поля** 107  
 — кривой 107 (см. — Параллельный перенос)  
**Локальные и глобальные свойства частиц** 141, 150, 259, 297  
**Локальные свойства частицы** (см. Состояния частицы локализованные, Внутренние степени свободы)

**Мера операторнозначная** 30  
 — спектральная (проекторнозначная) 131  
**Многообразие дифференцируемое** 98, 259, 287  
 — расслоенное (см. Расслоение)  
**Монополь калибровочный** 185  
 — пробный 218, 221  
 — магнитный 180  
 — пробный 211, 215

**Неинтегрируемые фазовые множители** (см. Экспонента упорядоченная)

**Параллельный перенос** 108, 271, 273, 281  
**Переплетение индуцированных представлений** 347  
**Поле векторное** (см. Векторное поле)  
 — калибровочное (см. Калибровочное поле)  
 — , квантование 286, 295  
**Представление группоида путей** 135, 143  
 — 2-путей 206  
 — группы импримитивное 125  
 — индуцированное 124  
 — петель 133, 141, 165

Представление группы путей 136, 141  
 — — 2-петель 206  
 — —  $n$ -контуров 210  
 Преобразования калибровочные 92, 147  
 Производная вариационная 301  
 — внешняя 189  
 — неабелевой формы 156, 197, 204, 206  
 — ковариантная 94, 112, 140, 145, 264, 268, 312  
 Пропагатор 256  
 Пространство аффинное 119  
 — гильбертово 48, 111  
 — однородное 122  
 — расслоенное (см. Расслоение)  
 Путь 120, 209  
 — в пространстве путей (2-путь) 201  
 — —  $(n-1)$ -путей ( $n$ -путь) 208, 209  
 — параметризованный 28, 258  
 — с закрепленными концами 117

Расслоение 97  
 — главное 97, 100  
 — присоединенное 308  
 — реперов 265  
 — тривиальное 100  
 Редукция состояния (волнового пакета)  
 16, 64, 291  
 Рождение пар 261, 291

Связность расслоения 104  
 — — присоединенного 309  
 — — реперов 265  
 Сечение расслоения 102, 311  
 Симметрия 123  
 —, нарушение 221, 261  
 Собственное время 253, 260  
 Состояния частицы локализованные 130,  
 132, 140, 146, 249, 272  
 — — реальные 130, 243, 246, 249, 275  
 Степени свободы внутренние 127, 140, 146,  
 287  
 Струна 230, 234, 237, 288, 296

Теорема де Рама 191  
 — — обобщенная 195, 198

Теорема Макки об импримитивности 125  
 — о транзитивности индуцирования 173  
 — Стокса 151, 189  
 — — обобщенная 151, 198, 199, 203  
 Тождественность частиц 239

Уравнение Дирака 244, 256, 269  
 — Клейна — Гордона 243, 253, 269, 280  
 — Максвелла 213  
 — Янга — Миллса 227

Форма (дифференциальная) 187  
 —, внешняя производная 189  
 — замкнутая 190, 198, 208  
 —, интегрирование 188 (см. также Интеграл неабелевой формы)  
 — неабелева 193, 198, 210  
 — точная 191, 195, 198, 208  
 Формула Стокса (см. Теорема Стокса, Теорема Стокса обобщенная)  
 Фундаментальная длина 259  
 Функции блоховские 173, 175, 179  
 — путезависимые 19, 150 (см. также Калибровочное поле, напряженность)

Циклы 191  
 — базисные 192, 198  
 — обобщенные (неабелевы) 202, 209, 223

Частицы закрученные 168, 171  
 — калибровочно заряженные 110, 142  
 — тождественные 239

Условие квантования Дирака 161  
 — структурное 125, 144, 247, 267  
 — Эйнштейна — Смолуховского (Чепмена — Колмогорова) 38

Экспонента упорядоченная 108, 141, 156,  
 270 (см. также Представление группоиды путей, Представление группы петель)  
 Эффект Ааронова — Бома 160, 163



*Михаил Борисович Менский*

ГРУППА ПУТЕЙ: ИЗМЕРЕНИЯ, ПОЛЯ, ЧАСТИЦЫ

Редактор *В. П. Белоусов*

Техн. редактор *Л. В. Лихачева*

Корректор *В. П. Сорокина*

ИБ № 11990

Сдано в набор 07.07.82. Подписано к печати 18.02.83. Т-06444.  
Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Бумага тип. № 1. Обыкновенная гарнитура.  
Высокая печать. Условн. печ. л. 20. Уч-изд. л. 22,51. Тираж  
4000 экз. Заказ 1589. Цена 3 р. 70 к.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени  
Первая типография издательства «Наука»  
199034, Ленинград, В-34, 9 линия, 12.











3р. 70к.

W.B. MERRICK

PROPERTY